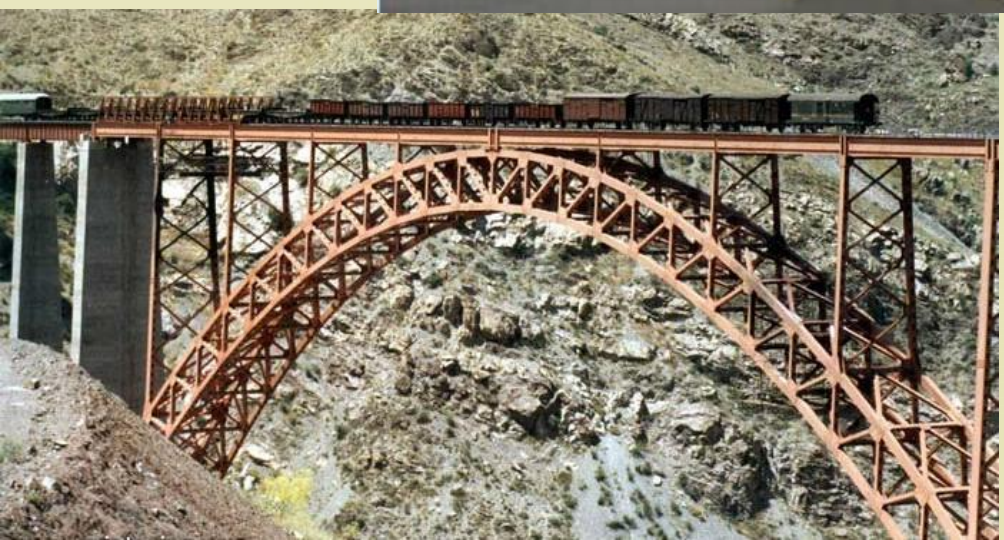
لومړی څپرکی

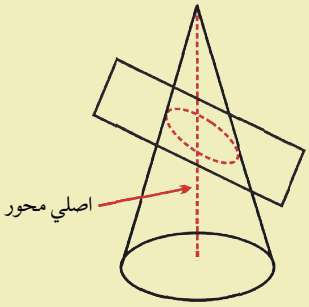
مخروطي مقاطع





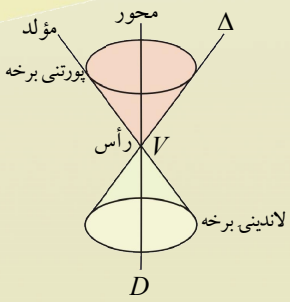
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آيا ويلای شئ چې د يوې مستوي او مخروط د تقاطع له
ګډ فصل څخه څه ډول منحني ګانې لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعريف



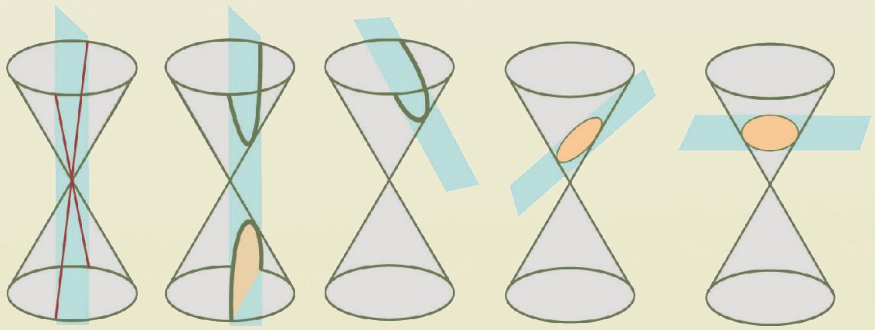
د Δ او D دوه مستقيم خطونه داسې په پام کې نيسو چې يو بل د V په ټکې کې قطع کړي. کـه چيـرې د D خـط ثابـت او د Δ خـط د هغـه پـه چـاپير وخرخېږي، له دې خرخولو څخه پـه فضـا کې دوه شـکلونه چې يـو يـې د V (ټکی) پورته او بل يې د V د ټکي شکته خواتـه جـوړېږي. هـر يـو يـې مخـروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مسـتقيم خـط د مخـروط اصـلي محـور او د Δ مستقيم خط د هغه مولد دی.

د يوې مستوي په واسطه د يوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په راتلونکي کې به هر يو په تفصيل سره ولوستل شي.

فعاليت

- يو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصـلي محـور بانـدې عمـود او يـا لـه قاعدو سره موازي وي، ويلای شئ، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محـور تـه مايلـه وي، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه يې سر په سر (منطبق) او قاعدې يې موازي وي، د يوې مستوي په واسطه چې اصـلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ويلای شئ چې له ګډ فصل څخه يې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مسـتوي د مخـروط اصـلي محـور پـه بـر کـې ولـري، تقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوي (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړی وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په بر کې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې مخروطونه داسي قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په څان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.



پوښتنې

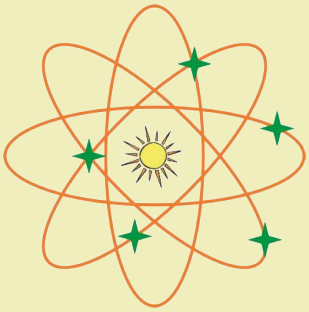
1- پورتني شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیئ؟

بیضـــوي

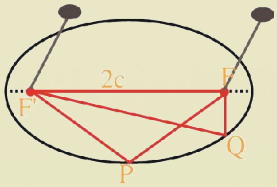
Ellipse



د سیارو حرکت د لمریز نظام په شاوخوا څه ډول منحني ګانې جوړوي؟

فعالیت

- د میز پر سر د یوې سپینې کاغذي پانې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F' په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار څوکه چې اوږدوالی یې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زیات یا د $\overline{FF'}=2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل ته په کتو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وخرخوئ.
- هغه شکل چې له یوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحني ده؟

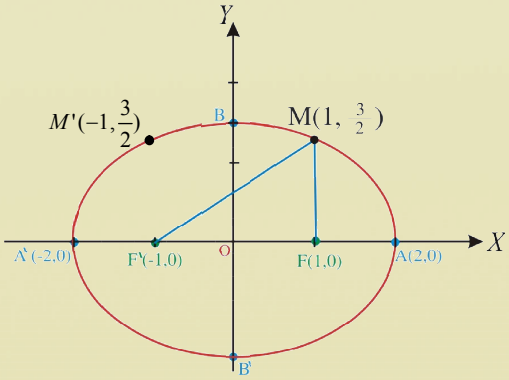


له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، بیضوي بلل کېږي، د F او F' ټکي د بیضوي د محراقونو په نامه یادېږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F,F' ، M,M' ، A' او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF|$ ، $|MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیداکړی او د $|MF|+|MF'|$ د جمع حاصل لاس ته راوړئ او د $|AA'|$ اوږدوالی سره یې پرتله کړئ.



- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنی ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنګه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F|+|M' F|$ او $|M F'|+|M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

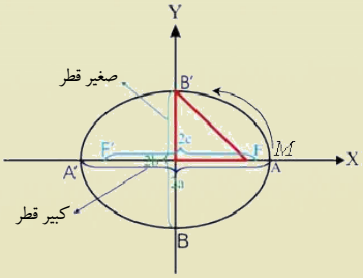
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او A', A د بیضوي راسونه چې $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F|+|M' F'|=2a \quad , \quad |M F|+|M F'|=2a$$

نو:

$$|M' F|+|M' F'|=|M F|+|M F'|=2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF' د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکی د بیضوي راسونه دي، کبیر قطر په AA' چې اوږدوالی یې $AA'=2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB'=2b$ دی، ښودل کېږي.

یادښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF}=\overline{MF'}$ سره کېږي.

د بیضوي له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$2\overline{MF}=2a$$

$$\overline{MF}=a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

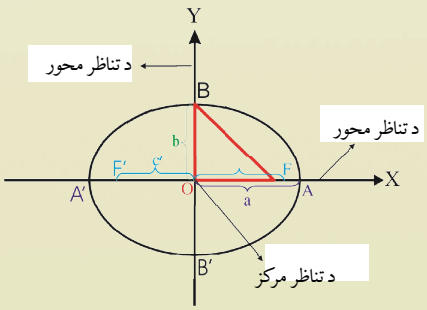
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادېږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کېږي او په (O) سره ښودل کېږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (**Eccentricity**): د محراقونو د اوږدوالي او د کبیر قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزیت وایې چې د یوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کېږي ، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کېږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهېږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کېږي، ولې؟

د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

یادونه: که چېرې د e قیمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چېرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي د ډېرو مسایلو په حل کې د عن المرکزیت څخه کار اخیستل کېږي.

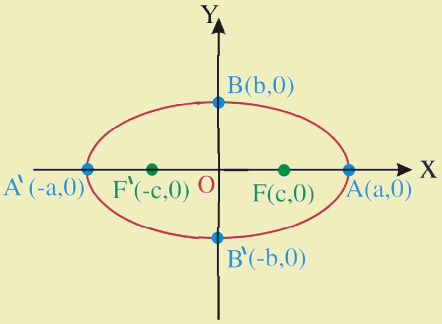
پوښتنې

1 – که چېرې په بیضوي کې د کبیر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحني په لاس راځي؟

2 – که چېرې د بیضوي عن المرکزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟

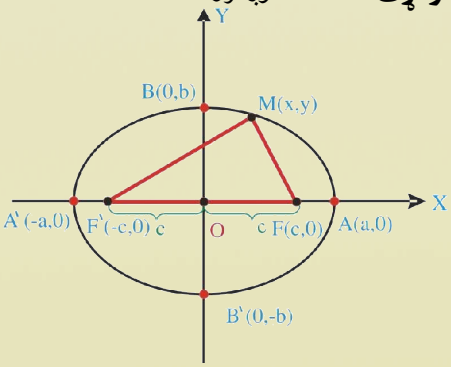


فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکې ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د MF او MF' اوږدوالی پیدا کړئ او د هغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

د بیضوي د معادلې ثبوت

لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad /\div(-4)$$

یا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad /\div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بیضوي په پورته معادله کې a د کبیر قطر نیمایي او b د صغیر قطر نیمایي دی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مرکز کې او محراقي محور یې د x پرمحور دی.

د کبیر او صغیر قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases} A(a,0) \\ A'(-a,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} B(0,b) \\ B'(0,-b) \end{cases} \qquad \begin{cases} F(c,0) \\ F'(-c,0) \end{cases}$$

دویم حالت: که چېرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

د هغه ګراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات پې ولیکي.

لومړی مثال: که چېرې د بیضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی یې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل :

$$|AA'|=2a=6 \Rightarrow a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \Rightarrow b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

دويم مثال: كه چېرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی يې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی يې $|BB'|=8$ واحده وي، د بيضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف يې رسم کړئ.

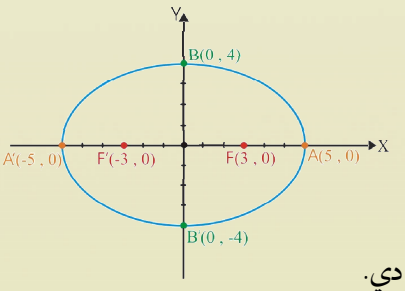
حل: پوهېږو چې:

$$|AA'|=2a=10 \Rightarrow a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \Rightarrow b=\pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د c قیمتونه پیدا کوو:



$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$

د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عين‌المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دی.

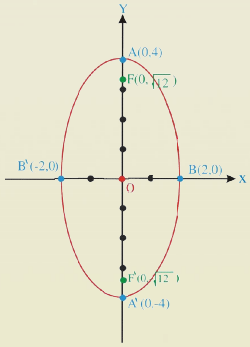
دريم مثال: د داسې بيضوي ګراف رسم کړئ چې معادله يې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 وېشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4 \Rightarrow A(0,4)\ ،\ A'(0\ ،\ -4)$$
$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2 \Rightarrow B(2،0)\ ،\ B'(-2\ ،\ 0)$$



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

څلورم مثال: د بيضوي د محيط پر مخ د يوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات يې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی يې پيدا کړئ.

حل: د بيضوي د تعريف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a$ ... I

د PF او PF' د فاصلو اوږدوالی پيدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قيمتونه د I په رابطه کې ايږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \,/\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$|AA'| = 2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9\cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'| = 2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونيسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله يې پيدا کړئ.

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې بيضوي معادله وليکئ چې عن‌المرکزيت يې 0.8 وي.

د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

آيا دداسې بيضوي معادله پيدا کولای شو چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

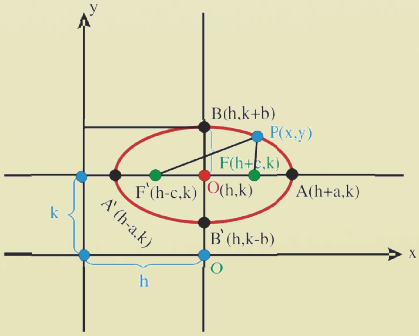
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعاليت

- يوه بيضوي د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) اوږد قطر يې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ يو ټکی د بيضوي په محيط باندې په پام کې ونيسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بيضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A' , A او B', B وضعيه کميات په شکل کې وښياست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو له فارمول او د بيضوي د تعريف څخه په کار اخيستنې سره د بيضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قيمتونه د بيضوي د تعريف په رابطه کې ايږدو.



$$\left|\overline{PF}\right|+\left|\overline{PF'}\right|=2a$$

$$\left|\overline{PF}\right|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\left|\overline{PF'}\right|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ )2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})/\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

خرنګه چې په بیضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\quad /\div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله یې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: څرنګه چې نومورې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې $(6,-4)$ دي، اوږد محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

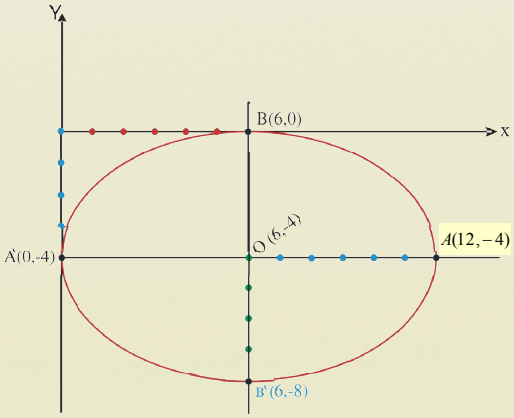
$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$

د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

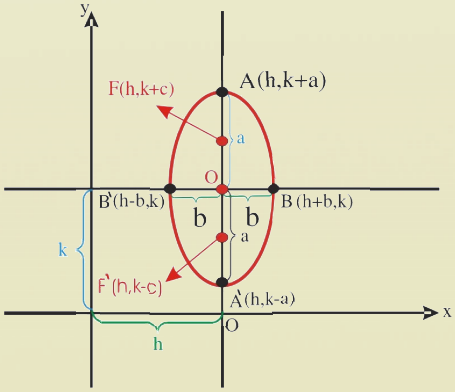
د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$$



دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\ ,\ k+a)\ ,\ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\ ,k)\ ,\ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ ,\ F(h\ ,k+c)$$



يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعنې $A>0\ ,\ C>0$ يا $A<0\ ,\ C<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنۍ معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(1-, 2)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$
$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$
$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$
$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}-(2)^2+9\underbrace{[y^2-2y+(1)^2]}-9-23=0$$

کامله مربع کامله مربع

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$
$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

a) $\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ b) $x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

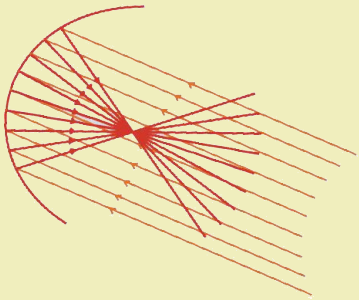
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(1,2)$ ټکی، محراق یې د $(2, 6)$ ټکی وي او د $(4,6)$ له ټکې څخه تېره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

a) $9x^2+25y^2-36x-150y+36=0$ b) $16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

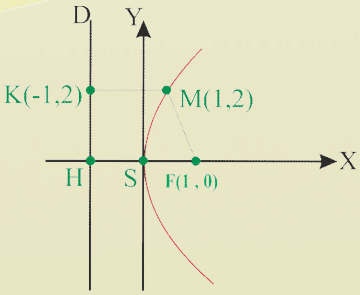
پارابـولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په یوې معقرې عدسیې ولویږي، انعکاسي وړانګې یې له کوم ټکي څخه تېریږي؟ دغه ټکی څه نومیږي او د عدسې ګډ فصل له یوې متقاطع مستوي سره چې د عدسیې اصلي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعالیت

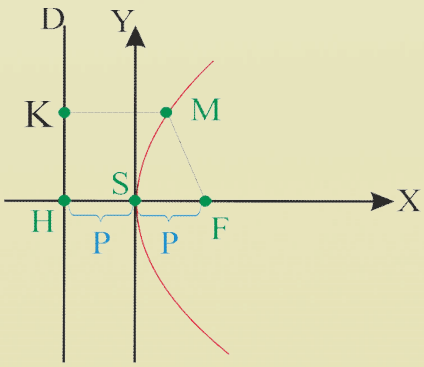


په مخامخ شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د FM او KM هر یو اوږدوالی پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

له پورته فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او یوه ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي. دغه ثابت یا مستقر ټکی د پارابولا محراق (F) او د D ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي خط یا موجه خط (Directrix) وایي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقیم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تیر او د موجه (D) پر مستقیم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي یا تناظري محور په نامه یادیږي.



د تناظري محور او منحني ګډ ټکی د پارابولا راس او په S سره ښودل کیږي.

آیا ویلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نیمایي ټکی دی، ولې؟

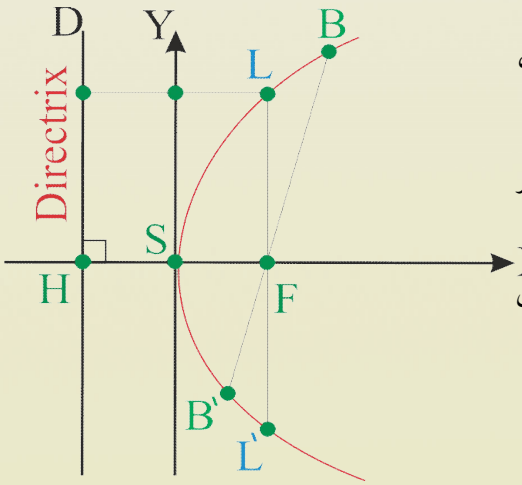
په پارابولا کې عن المرکزیت $(e = 1)$ دی، ولې؟

د پارابولا وترونه

هغه مستقيم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کيږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تير شوي دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کيږي.



پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښيئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

د پارابولا معادله

څنکه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، پيدا کړو.

$$y^2 = 4px$$

$$x^2 = 4py$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو قايم سيستم په پام کې ونيسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله يې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکې څخه يو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته يې K ووياست.
- د F او K د ټکو مختصات وليکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پيدا کولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د F,M او K,M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او دا قيمتونه د پارابولا د تعريف په رابطه کې کيږدي. $|MF| = |MK|$

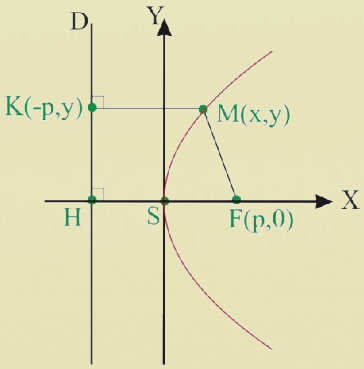
ثبوت لومړی حالت: پوهيږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قيمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ايږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله رابنيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور يې د x پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله يې $x=-p$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور بنې خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کينې خواته خلاصه ده.



لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$ ، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ويلای شو $P=2>0$ ، له دې امله د پارابولا خوله بنې خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

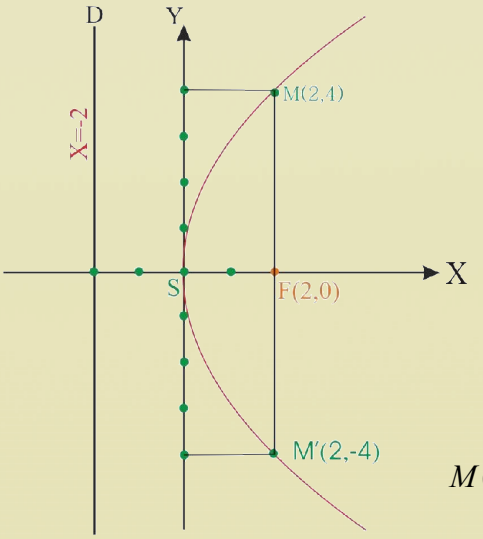
$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

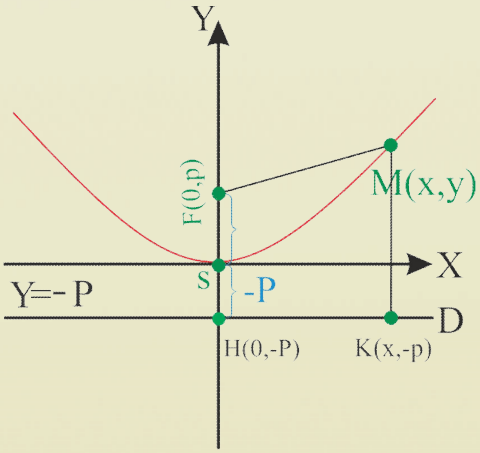
$$y=\pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)$, $M'(2,-4)$



دویم حالت: که چېرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټکي په پام کې نیسو د تعریف له مخې لیکلای شو:



$$|\overline{MF}|=|MK|$$

$$|\overline{MF}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}|=\sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2=(\sqrt{(y+p)})^2\ /(\ \ )^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

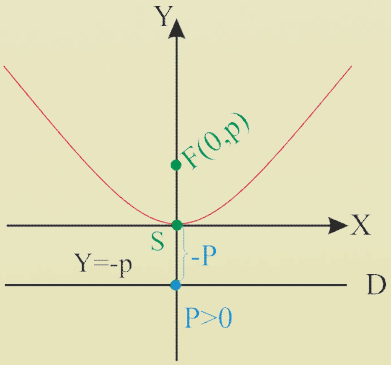
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

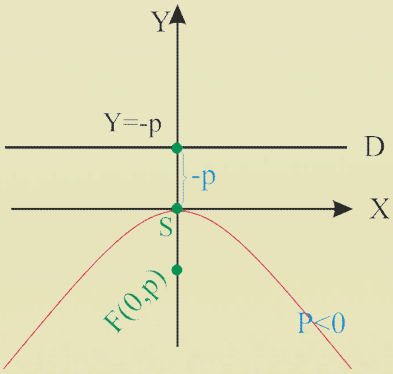
$$\Rightarrow x^2=4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پيدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

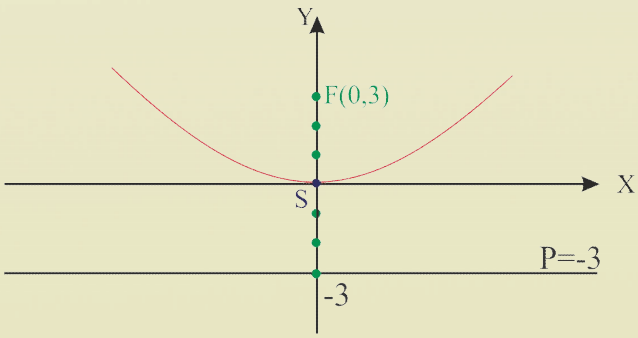
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

څرنګه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{matrix} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتنې

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0)$	$F(0,5)$
$b)\ S(0,0)$	$F(-2,0)$

د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

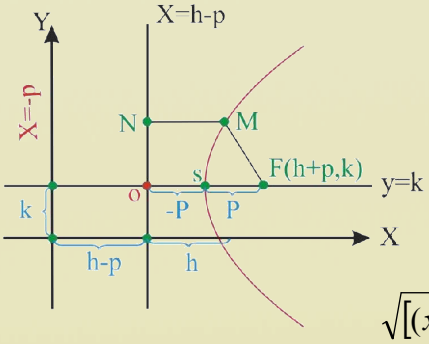
آيا د داسې پارابولا معادله پيدا کولای شو چې د راس مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې (h,k) او تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووياست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخېستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت: خرنګه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضعيه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

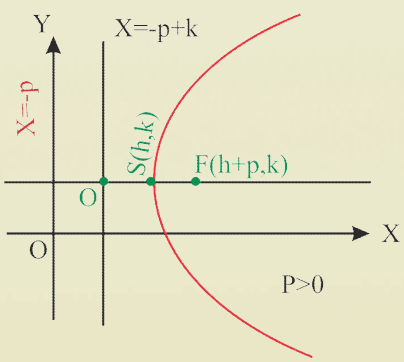
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

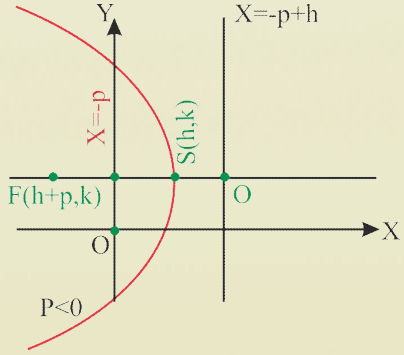
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعیه کمیات یې په ترتیب سره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





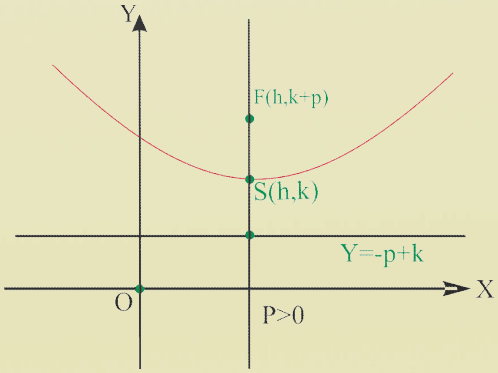
دویم حالت: د هغې پارابولا معادله چې راس یې (h,k) او د تناظر محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

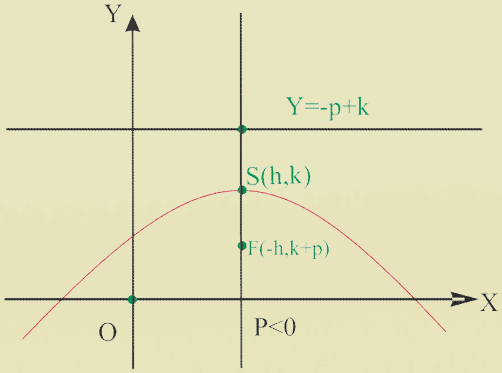
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

د پارابولا د هادي خط معادله او $y=k-p$ تناظري محور دی. $x=-h$

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړي مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2, h=1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعیه کمیات عبارت دي له: $S(1,2)$

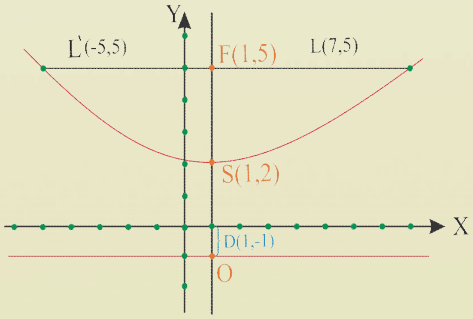
$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \Rightarrow F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \Rightarrow y=2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د y قیمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اړدو یعنې $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$

دویم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونیسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $S(-3,4) \Rightarrow k=4, h=-3$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

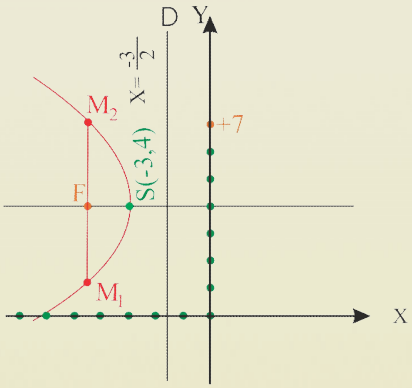
څرنګه چې $-\frac{3}{2}<0$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \Rightarrow y=4$

د محراق $x=-\frac{9}{2}$ مختصی قیمت په معادله کې اړدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$

$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$

$$y_1=3+4=7$$

$$y_2=-3+4=1$$

$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A یا C صفر وي نه دواړه ($A=0$, $C\neq 0$ وي یا $A\neq 0, C=0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې پې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته پې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$

$$(y-1)^2+8x+24=0 \Rightarrow (y-1)^2+8(x+3)=0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کېږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \Rightarrow y=1$.



پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

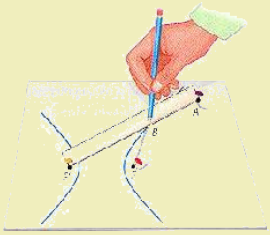
2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې ګراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او ګراف پې رسم کړئ.

$a)\ \ y^2-6y+8x+41=0$ $\qquad$ $b)\ \ x^2-2x-6y-53=0$

هـايپـربـولا

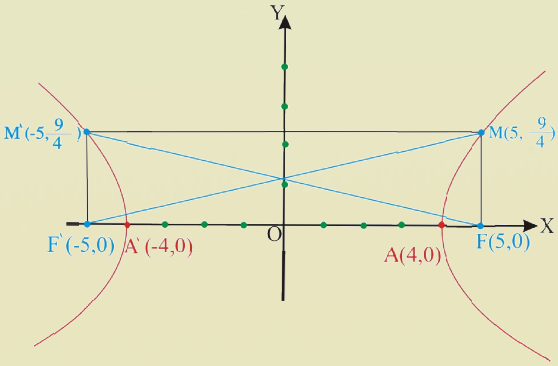
Hyperbola



په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له يوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول يوه منحني کېدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ.
- د $|MF'| - |MF|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتنی فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله يې وليکئ
- د $|MF'| - |MF|$ او $|M'F'| - |M'F|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کېږي، يعنې: $|MF'| - |MF| = |AA'| = 2a$

په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه، M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي.

د FF' منځنۍ ټکی د هایپربولا مرکز دی، د مرکز او هر يوه راس ترمنځ فاصله په a او د مرکز او هر يوه محراق ترمنځ فاصله په c سره ښيي. $AA' = 2a$ او $FF' = 2c$.

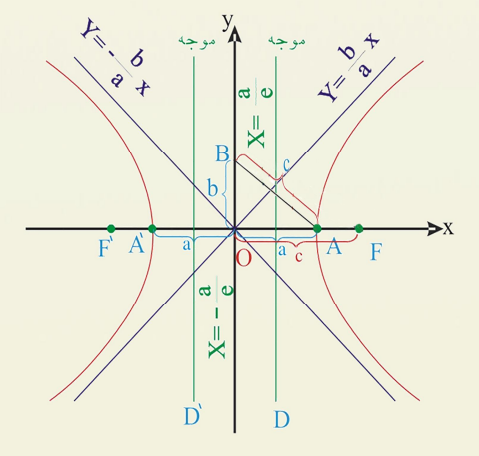
د هايپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بيضوي په څېر هايپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې يو يې په FF' باندې منطبق دی او بل يې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی يا ځای، د ها يپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تېريږي، د متقاطع محور (Transverse axis)په نامه يادېږي، ځکه چې هايپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هايپربولا حقيقي راسونه وايې او اوږدوالی يې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هايپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هايپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور(conjugate axis) په نوم يادېږي. د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي پر نوموړی محور باندې داسي په نظر کې نيسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هايپربولا غيرې حقيقي راسونه بلل کيږي چې ترمنځ يې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په يوه هايپربولا کې د a, b او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$

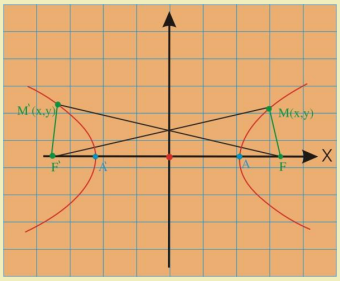


عن المرکزیت: څرنګه چې په هايپربولا کې $c > a$ دي، نو $e > 1$ کېږي. چې د c, b, a او عن المرکزيت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخېستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

پوښتنې

د هايپربولا يو شکل رسم کړئ او په هغه کې د هايپربولا مرکز، محراقونه، حقيقي او غيرې حقيقي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښيئ.

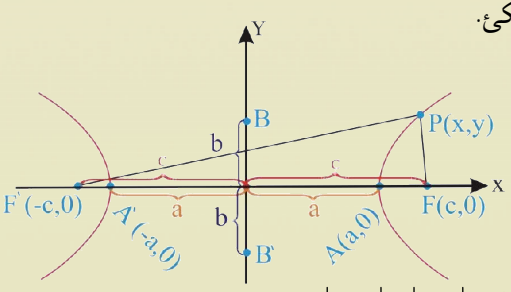
د هایپربولا معادله



آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟

فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هایپربولا د منحني په یوې خانګې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخېستنې سره د PF او PF' فاصلې پیدا کړئ او هغه د هایپربولا د تعریف په رابطه کې ولیکئ.



د هایپربولا د معادلې د پیداکولو لپاره د تعریف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې په هایپربولا کې $c^2=a^2+b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2-a^2=b^2$ کېږي، نو په پورته افاده کې د c^2-a^2 د قیمت په اېښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 /\div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

پورتنۍ معادله د داسي هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې د هایپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

د پورتنۍ رابطې ګراف رسم، فارمول یې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات یې پیدا کړئ.

د هایپربولا موجه خطونه

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y=\pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x=\pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحني سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

کـه چیـرې پـه پـورتنی رابطـه کـې x لایتنـاهي تـه نـژدې شـي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسـر د صـفر خواتـه نـژدې کیـږي پـه پایلـه کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

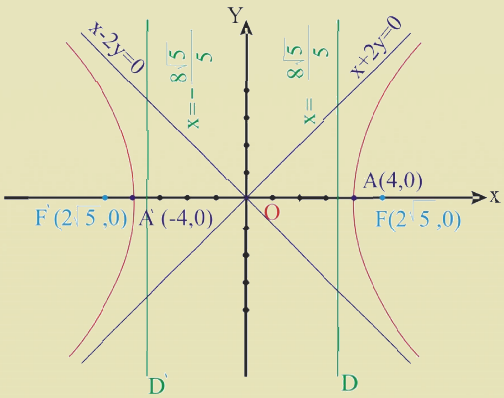
حل: درأسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\ \Rightarrow\ b=\pm2\ \Rightarrow\ B(0,2)\ ،\ B'(0,-2)$$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$
یا: $x=\pm2y\ \Rightarrow\ x+2y=0,x-2y=0$

دویم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ معادله د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنۍ معادله د هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات:
$$a^2=4\Rightarrow a=\pm2\Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm3\Rightarrow B(3\ ,0)\ ,\ B'(-3\ ,0)$$

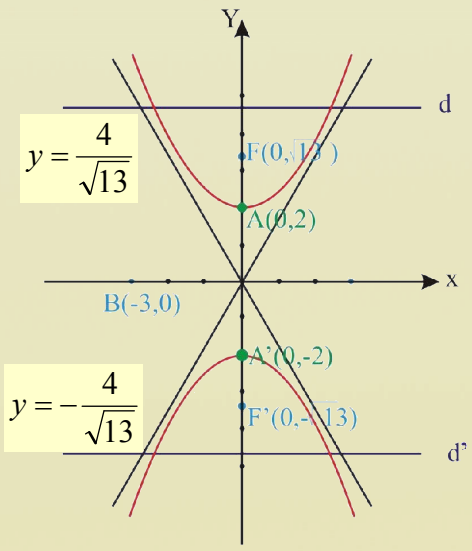
د محراقونو مختصات:
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$$

$$F(0,\sqrt{13})\quad ,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې یې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm2x$$

$$3y-2x=0\qquad ,\qquad 3y+2x=0$$



د موجه خط معادله: څرنګه چې د هایپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او ګراف یې رسم کړئ.

د هغې هايپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

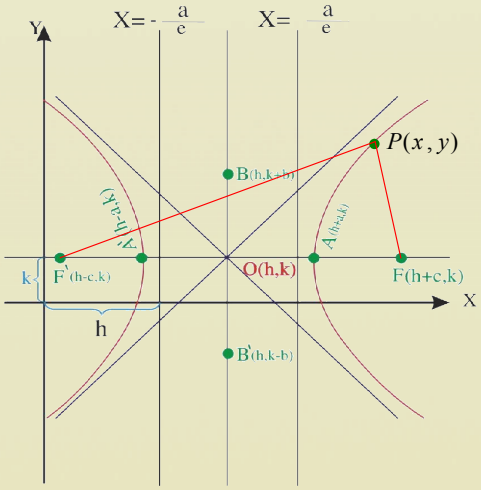
آيا د داسې هايپربولا معادله شته چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې داسې هايپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات يې (h,k) او متقاطع محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د هايپربولا د منحني پرمخ باندې د $p(x,y)$ يو اختياري ټکی په پام کې ونيسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هايپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو مختصات يعنې F او F' ، د راسونو مختصات يعنې A, A', B, B' په شکل کې وښاياست.



د شکل څخه په کار اخيستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو له فارمول او د هايپربولا د تعريف له رابطې څخه په کار اخيستنې سره ليکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنۍ رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

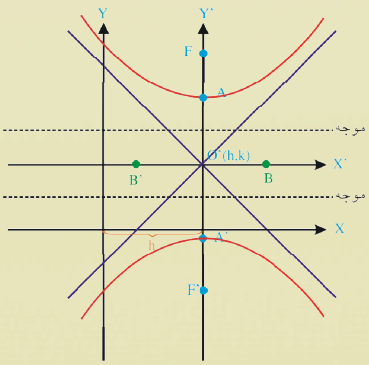
د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

یادونه: د هایپربولا پراختیایې معادله له $AX^2+BY^2+DX+EY+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A,B\neq 0$ او $A\neq B$ یا $A=B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړي مثال: د $9(x-3)^2-4(y+1)^2=144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوې معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144}-\frac{4(y+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$
$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ یعنې $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm 4$

$$A(h+a,k)=A(3+4,-1)=A(7,-1)$$
$$A'(h-a,k)=A'(3-4,-1)=A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2=36\Rightarrow b=\pm 6 \\ B(h,k+b)=B(3,-1+6)=B(3,5), \\ B'(h,k-b)=B'(3,-1-6)=B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=16+36=52\Rightarrow c=\pm\sqrt{52}$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)=F(3+\sqrt{52},-1)\quad F'(h-c,k)=F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چېرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{6}{4}(x-3)-1=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

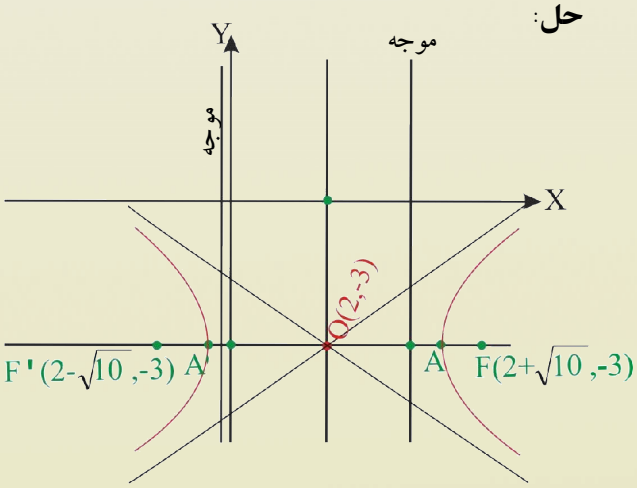
$$y=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1\ /\cdot 2\Rightarrow 2y=\pm 3(x-3)-2$$

$$2y=3x-9-2\ \Rightarrow\ 2y-3x+11=0$$
$$2y=-3x+9-2\ \Rightarrow\ 2y+3x-7=0$$

دویم مثال: د هایپربولا $2x^2-8x-3y^2-18y-31=0$ معادله په پام کې ونیسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او مجانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:

$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$



پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعنې د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm2 \quad , \qquad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \ c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

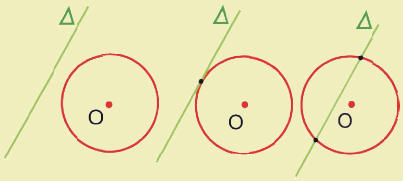
$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3\ /\cdot\sqrt{6}\Rightarrow \sqrt{6}y=\pm2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

د مستقيم خط موقعيت نظر مخروطي مقاطعو ته

يوه اختياري مستقيم خط، يوه دايره د امکان په صورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعالیت

د O دايره او د Δ مستقيم خط په پام کې ونيسئ:

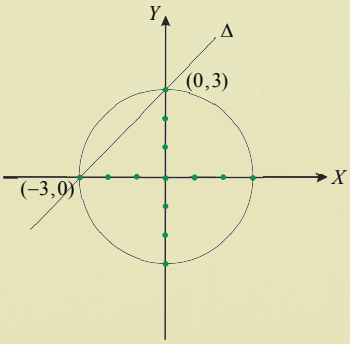
- يوه دايره او مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې يوازې يو ګډ ټکی سره ولري.
- آيا کيدای شي چې يوه مستقيم خط، يوه دايره له دوو ټکو څخه په زياتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چيرې د دايرې د مرکز او مستقيم خط تر منځ واټن، د دايرې له شعاع څخه لوی وي. دايره او مستقيم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: په يوه مستوي کې يوه اختياري مستقيم خط او يوه دايره امکان لري، يوازې يوه، دوه او يا هېڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړي مثال: په وضعيه کمياتو کې د $x^2+y^2=9$ دايره او $y=x+3$ مستقيم خط رسم او موقعيت يې و ټاکي.

حل: په شکل کې ليدل کېږي، چې دايره او مستقيم خط يو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پايلې د لاس ته راوړلو لپاره که چيرې د مستقيم خط له معادلې څخه د y قيمت د دايرې په معادله کې وضع کړو عين نتيجه په لاس راځي:



$$y=x+3$$
$$x^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2+x^2+6x+9=9$$
$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قيمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ايږدو او د y قيمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \Rightarrow y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \Rightarrow y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دايرې او مستقيم خط د تقاطع ټکی دی.

په عمومي ډول کله چې د مستقيم خط له معادلې څخه د x يا y متحول قيمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره يوه دويمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل يې د Δ په قيمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام ورړ، پايلې لري:

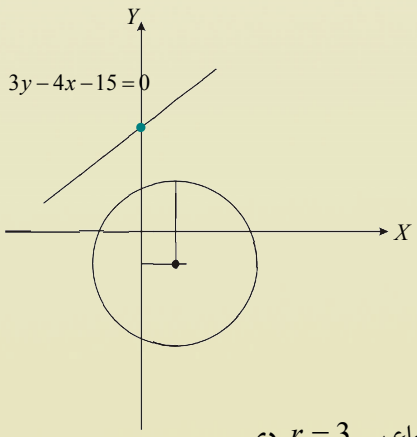
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقيم خط او منحني يوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف يا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقيم خط د مخروطي مقاطعو له منحني سره يوازې يو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقيم خط او منحني يو بل نه قطع کوي.

دويم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دايره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقيم خط په پام کې ونيسئ او موقعيتونه يې له يو بل سره و څېړئ.

حل: لومړی د دايرې معادله په معياری شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دايرې له معياري معادلې څخه پوهيږو چې د دايرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع يې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقيم خط معادله معياري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 41=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+369=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36900=-14400 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د مستقیم خط موقعیت د $y-x^2+1=0$ پا رابولا ته وڅېړئ.

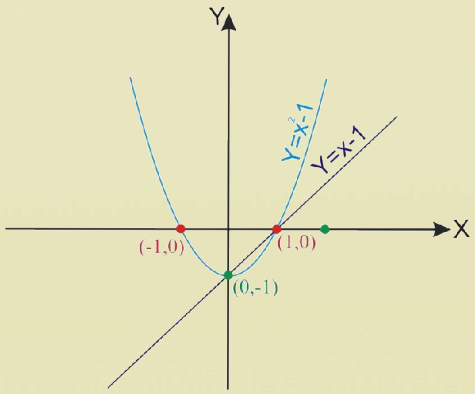
حل: د پورتنۍ مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې و ضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1-0 \Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې $\Delta=1>0$ ده، نو $y=x-1$ مستقیم خط د $y-x^2+1=0$ پارابول په دوو ټکو کې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2-x=0$$

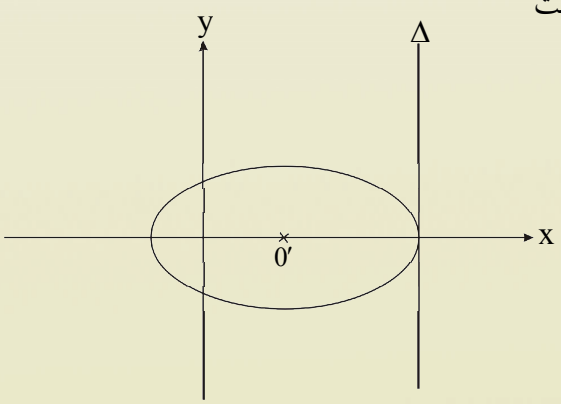
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نومورې مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$ $(0,-1)$, چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

څلورم مثال: د $x=5$ مستقيم خط او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بيضوي موقعيتونه وڅېړئ.

حـــل: کـه چېـرې د $x=5$ د مسـتقيم خـط قيمـت د بيضوي په معادله کې کېږدو، نو په لاس راځي:



$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

څرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$

په دې ډول ويلای شو چې مستقيم خط او بيضوي يو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول ليدل کيږي.

يادونه: د مخروطي مقاطعو غزيدلی يا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad , Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنۍ معادلې د پېژندلو لپاره په ياد ولرئ چې:

1- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A=B$ او يو شان علامې ولري، يوه دايره ده.

2- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ او يو شان علامې ولري، يو بيضوی دی.

3- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ يا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هايپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف يې يو پارابولا ده.

$Ax^2+Bx+Cy+D=0$ او $Ay^2+By+Cx+D=0$



پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$ $\quad b)\ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ 25x^2+16y^2=400$ $\quad d)\ x^2-y^2=0$

$e)\ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ بيضوي او $y=3$ مستقيم خط يو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هايپربول د تقاطع ټکي پيداکړئ.

د څپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحني ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم یادیږي.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه بلل کیږي او $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی

شمیره	معادلې	د مرکز وضعیه کمیات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm c,k)$
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm c)$

د بیضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

پارابولا: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي، دغه ثابت يا مستقر ټکي ته د پارابولا محراق (F) او ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وايي.

شمېره	د پارابولا معادلې	دراس وضعيه کميات	د محراق مختصات	د موجه خط معادله	تناظري محور
1	$y^2 = 4Px$	$S(0,0)$	$F(P,0)$	$x = -p$	$x = 0$
2	$x^2 = 4Py$	$S(0,0)$	$F(0,P)$	$y = -p$	$y = 0$
3	$(y-k)^2 = 4P(x-h)$	$S(h,k)$	$F(h+p,k)$	$x = h-p$	$y = k$
4	$(x-h)^2 = 4P(y-k)$	$S(h,k)$	$F(h,k+p)$	$y = k-p$	$x = h$

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ په داسې حال کې چې $A = 0$ يا $C = 0$ وي، نه دواړه ($C \neq 0, A = 0$ يا $C = 0, A \neq 0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزيت $e = 1$ سره دی.

هايپربولا: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هايپربولا بلل کېږي.

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې	محراقونه	غير حقيقي رأسونه	د رأسونو وضعيه کميات	د مرکز وضعيه کميات	د هايپربولا معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د هايپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ يا $A\neq B$ ، خو مختلف الاشاره وي. په هايپربولا کې عن المرکزيت $e>1$ دی.



د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه او کرښه تري تاو کړئ.

1- که چېرې يو مستوي يو مخروط په مايل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بيضوي b) دايره c) هايپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د بيضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بيضوي له مرکز څخه:

a) برابر واټن لري b) مختلف واټنونه لري

c) د اوږد قطر نيمايي واټن لري d) د لنډ قطر نيمايي ده.

3- که چېرې M د بيضوي يو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د بيضوي عن المرکزيت له لاندې کومې يوې رابطې څخه په لاس راځي:

a) $e=\frac{a}{c}$ b) $e=\frac{c}{a}$ c) $e=\frac{b}{c}$ d) $e=\frac{c}{b}$

5- په بيضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړيکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) د پارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) د پارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) د پارابولا خوله کينې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونيسئ. د محراق وضعيه کميات يې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چېرې F او F' د هايپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هايپربولا د محيط يو ټکی کيدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

9- د $y = x^2$ د پارابولا ګراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته
b) د x محور ته
c) د x او y محورونو ته
c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e < 1$
b) $e = 1$
c) $e > 1$
d) $e = -1$

11- د $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.
b) د x پر محور باندې دی.
c) د x پر محور عمود دی.
d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره
b) دایره
c) پارابولا
d) بیضوي

13- د $y^2 = -4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$
b) $(4,2)$
c) $(2,0)$
d) $(-2,0)$

14- د $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې
b) بیضوي
c) پارابولا
d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 + 4y^2 = 4$
b) $9x^2 + 2y^2 = 15$
c) $16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$
d) $x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a = 4$ ، $e = 0,8$ دي او کبیر قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.
b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b = 6$ $e = 0,8$ دي او کبیر قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2 + y^2 = 4$
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

4- د پارابولا لاندې معادلې لومړۍ په معیاري شکل ولیکئ او بیایې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

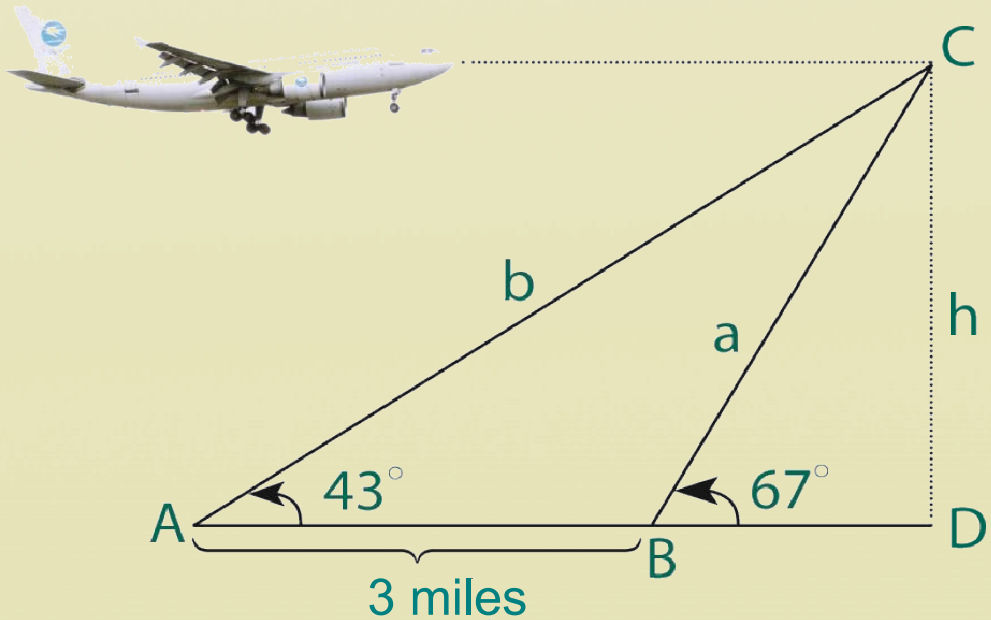
6- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقیقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقیقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی یې 4 واحده وي.

8- د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

دویم څپرکی

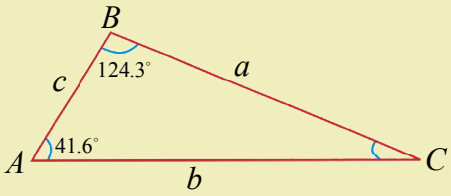
مثلثات


C
b
h
a
43°
67°
A
B
D
3 miles

د ساین قانون

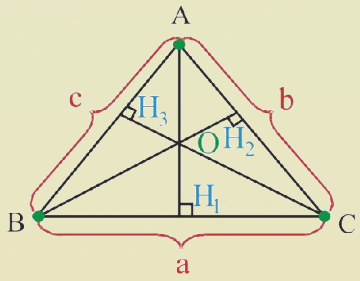
Law of sine

څرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاویې اندازه پیدا کړو؟



فعالیت

- د ABC یو حاده‌الزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH_1}$, $\overline{BH_3}$, $\overline{CH_2}$) ارتفاع ګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د ($\overline{BH_2}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړي.



له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c \sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b \sin C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$c \sin B = b \sin C \,/\div bc$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I}$$

اویا:

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_2}}{c} \Rightarrow \overline{BH_2} = c\sin A \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_2}}{a} \Rightarrow \overline{BH_2} = a\sin C \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې:

$$c\sin A = a\sin C / \div ac$$

اویا:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

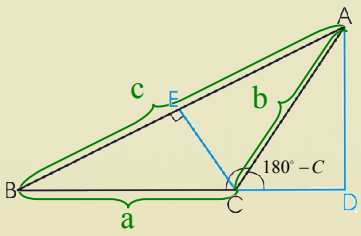
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنۍ اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادېږي.

پایله: په هر $\overset{\Delta}{A}BC$ کې چې A, B, C یې زاویې او a, b, c یې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متمم زاویو څخه پوهېږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو:

$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \ldots\ldots (1)$$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} \ldots\ldots (2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

د تناسب د خواصو له مخې د وسطینو ځایونه بدلوو.

$$\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$$

نو:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \ldots\ldots(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږی:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \ldots\ldots(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \ldots\ldots(II)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

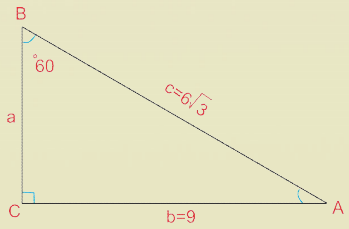
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال: په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

خرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو:

$$C = 90^\circ$$

همدارنګه پوهېږو چې په یوه مثلث کې:

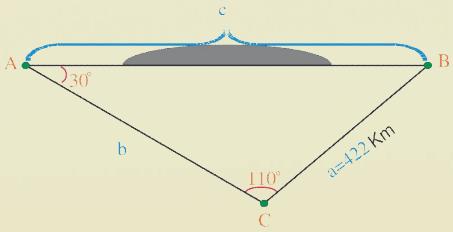
$$A + B + C = 180^\circ$$
$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$A = 180^\circ - 150^\circ$$
$$A = 30^\circ$$

د a ضلعې قیمت په لاندې ډول پیدا کولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B} \Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیدا کړي.



حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

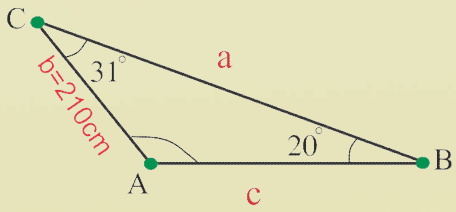
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

ځرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\frac{422km\cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c=793.0224km$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازې پیدا کړئ.



حل: پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیدا کولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

د a ضلعې د اوږدوالي د پیداکولو لپاره د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

خرنګه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

خرنګه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ دی د قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210\cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

یادونه:

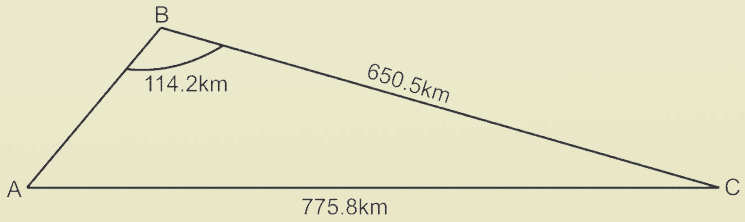
د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوې زاویې او د معلومې زاویې مخامخ ضلع یې معلومه وي، یعنې: ($A\ AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاویه یې معلومه وي، یعنې:(SAS).

باید ووایو چې دلته A د Angle او s د side مخفف دي.

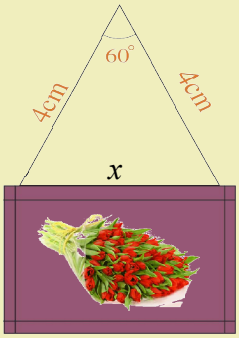
پوښتنې

1. که چيرې د يوه قايم الزاويه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m, b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاويو اندازه پيدا کړئ.
2. لاندې شکل په پام کې ونيسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پيدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine

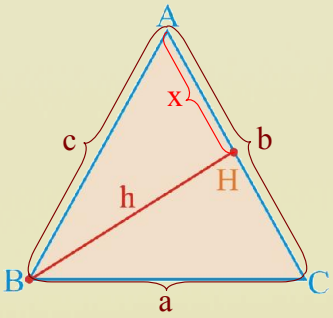


د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4\,cm$ وي او د مـنځ زاویـه یـې 60° وي، د تـار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د A, B, C راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیـدا او د فیثـاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:



ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویـه مثلـث کـې د $\overline{BH}$ ارتفـاع رسـموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې: $\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$

په $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت اېږدو، نو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \text{يا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

پایله: په یو اختیاري مثلث کې مو دا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ يا $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots I$

رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \text{يا} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ldots . II$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C \quad \text{يا} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ldots . III$$

په هر مثلث کې د یوې زاویې کوساین (Cos) مساوی دی د زاویې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاویې د مقابلې ضلعې مربع د زاویې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعالیت

- د تېرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساین قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

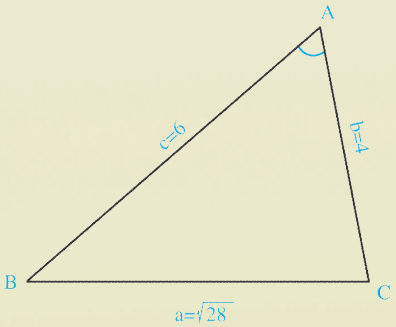
- چې دوې ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS).

د سایں او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیدا کولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
کله چې د یوه مثلث د دریو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SSS (ضلع، ضلع، ضلع)
کله چې د یوه مثلث د دوو زاویو او د یوې معلومې زاویې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د سایں له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاویه، زاویه، ضلع)
کله چې د یوه مثلث د دوو ضلعو او د یوې معلومې ضلعې د مقابلې زاویې اندازه معلومه وي، د سایں له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاویه، ضلع، زاویه)
کله چې د یو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاویې اندازه معلومه وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاویه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاویه، زاویه، زاویه)

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو درېو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاویې اندازه وټاکئ.

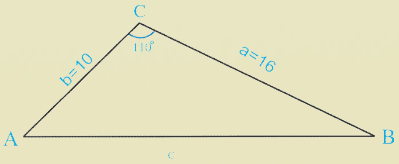
حل:



$$a=\sqrt{28}\ ,\ b=4\ ,\ c=6\ ,\ A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A \Rightarrow 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28 \Rightarrow 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاویه یې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

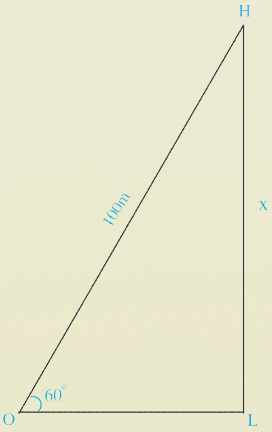
خرنګه چې : $\cos110^\circ=-0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(-0.342)} \Rightarrow c=\sqrt{356+109.44}$$
$$\boxed{c=21.57}$$

دریم مثال: یو پتنګ(کاغذ پران) له $100\,m$ تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاویه جوړه کړي وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قایم‌الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100} \Rightarrow x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL^2} = \overline{OH^2} + \overline{OL^2} - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL^2} = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL^2} = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL^2} = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $b=5,\ c=8\ ,\ \hat{A}=60^\circ$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ \Rightarrow\ a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

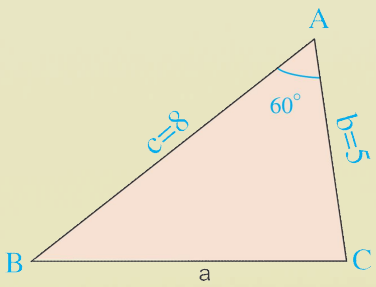
$$a^2 = 49 \ \Rightarrow\ a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b=4\,ft,\ a=5\,ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.
2. که چېرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

آیا په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلې اړیکې یو پر بل ووېشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت دی له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A \quad , \quad \frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B$$

پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

پورتنی اړیکې یو پر بل وېشو:

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

خرنګه چې $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}} \quad , \quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

- پورتنۍ رابطې په یوه مثلث کې د تانجنټ قانون بلل کیږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ \Rightarrow B+C=90^\circ \quad ...I$$

$$B+C=90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

خرنګه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

پوهیږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\frac{B-C}{2}=30^\circ\Rightarrow B-C=60^\circ \quad ...II$$

له I او II اړيکو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ \quad ..... \text{ I}$$

$$B+C=90^\circ \quad ..... \text{ II}$$

$$2B=150^\circ$$

$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قيمت په اپښودلو سره د C زاويه پيدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$

$$75^\circ-C=60^\circ$$

$$-C=60^\circ-75^\circ$$

$$\boxed{C=15^\circ}$$

دويم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $B=42^\circ\ 30'$, $c=432$ او $a=925$ وي، د د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پيدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ 30'$$

$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30'\Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad ..... \text{ I}$$

$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow\frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ 45'$$

$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45'\Rightarrow\tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363 \cdot 2.571 \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = 0,933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \text{ II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نیولو سره د A زاویې قیمت پیدا کوو:

$$A + C = 137^\circ\ 30' \quad \ldots I$$

$$\underline{A - C = 86^\circ \qquad \ldots II}$$

$$2A = 223^\circ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاویې قیمت پیدا کړو:

$$A + C = 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساین قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پیدا کوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432 \cdot \frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساین قیمتونه لیکو:

$$\sin 25^\circ\ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.676$$

$$b = 432 \cdot \frac{0.676}{0.434} = 672.885$$



پوښتنې

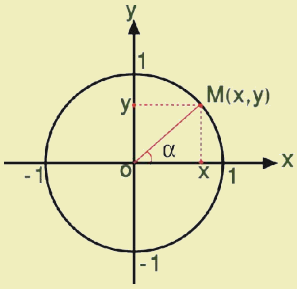
د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیدا کړئ.

a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پـوهېږو چـې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يـو الجبـري مطابقـت دی، ځکـه د a او b پـه ټولـو قيمتونـو سـره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او رابطه يې وليکئ.

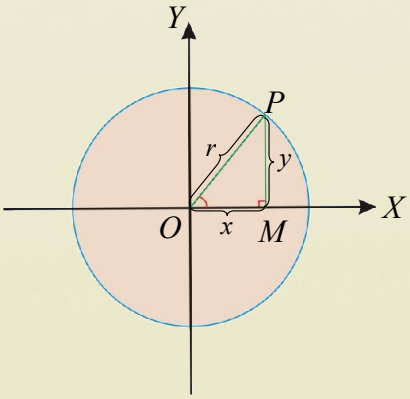
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاس ته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولـو قيمتونـو سـره ، د مسـاوات دواړه خـواوې برابـرې شـي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.

د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې د OMP قایم‌الزاویه مثلث رسموو او کولای شو ولیکو:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\quad\text{او}\quad\sin\alpha=\frac{y}{r}$$

د فیثاغورث د قضیې څخه کولای شو ولیکو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 وېشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}\qquad\text{یا}\qquad(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\quad,\quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha\quad,\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1\quad,\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad,\quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1\quad,\quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\quad,\quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\quad,\quad tag\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 وېشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}=\sec\alpha$ او $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو ولیکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad 1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د یوې الجبري افادې حدود د یوې یا څو زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta = \sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta = \cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ (1+\sec^2\beta) = ?$$

حل:

$$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta) = \cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta+1$$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل: د مطابقت د کېنې اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$
$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$
$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$
$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښایاست چې $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$
$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$
$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\dfrac{1}{\cos^2 A}}{\dfrac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کینې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قیمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه اړدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهېږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې ښئ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$



پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $b)\ \cot^2\beta$

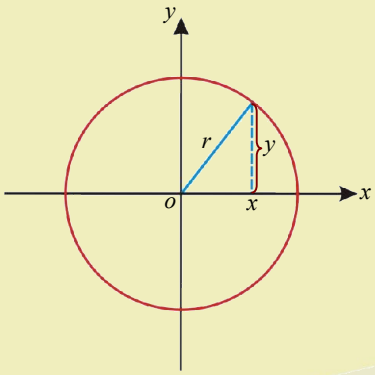
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



پوهيږو چې $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يو مثلثاتي مطابقت دی، آيا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β دکومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري.

_ آيا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

_ آيا $1-2\sin\beta=0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

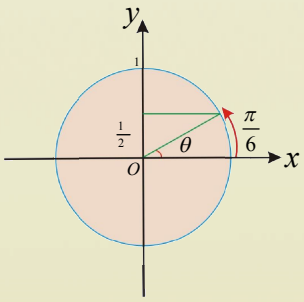
هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حل کولی شو.

لومړی حالت: $a\sin\alpha+b=0$

د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

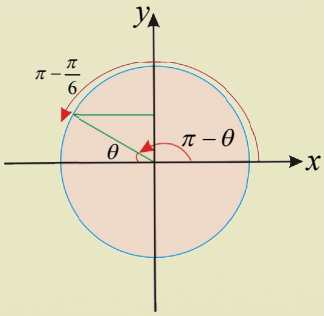
مثال: د $2\sin x-1=0$ مثلثاتي معادلې د حل ستې پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x-1=0 \Rightarrow 2\sin x=1 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi-\theta)$ له رابطې څخه هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x=\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z$$

نو د $\sin x=\frac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو ستونو کې دی.

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,4\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z\right\}$$

$$A_2=\left\{\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1\cup A_2=A=\left\{x/\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \wedge\ \ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل ستې پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \Rightarrow 2\sin x=3 \Rightarrow \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې sin د -1 او $+1$ په منځ ($-1\le \sin x\le 1$) دی، نو هغه زاویه چې sin یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x+b=0$

د پورتنۍ معادلې د حل مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

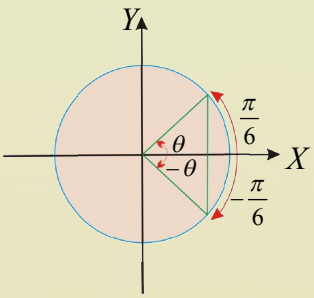
لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل ستې پیدا کړئ.

حل: له پورتنۍ معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\ ,\ \pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو یا لټوو چې cos یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{6}.$$



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیدا کوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو ستې داسې لیکل کېږي: $x=2n\pi\pm\theta, n=1,2,3\ldots$

$$A=\left\{x/\ x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in z\right\}$$

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \Rightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0,\ 2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل ستې يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دريم حالت: $a\tan x+b=0$

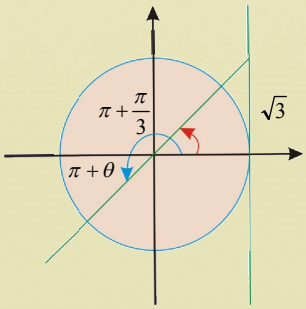
د عمومي حل د پيدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

حل: له پورتنۍ تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنۍ معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ldots\right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونه داسې لیکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\ \ k\in Z\right\}$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\ \ k\in Z\}$

دویم مثال: لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل ست $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\ \ k\in Z\right\}$

دریم مثال: د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[\,0\ ,\ 2\pi\,]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحیح عددونه لیکو، تر څو هغه زاویې چې د $[\,0\ ,\ 2\pi\,]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0} & x_1=\frac{7\pi}{12}\\ \xrightarrow{k=1} & x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}\end{cases}$$

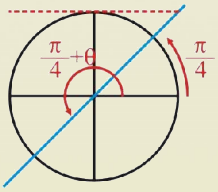
څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنۍ معادلې څخه $\cot x$ پیدا کوو: $\cot x-1=0\ \Rightarrow\ \cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه ګورو چې $\cot$ یې $(+1)$ وي او هغه زاویه له $\frac{\pi}{4}$ یا 45° څخه عبارت ده :

نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$$x = \frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

نو د معادلې د حل ستونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو:

$$A = \{x / x = k\pi + \theta\ ,\ k \in Z\}$$

دریم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

a) $3\cos x + 5 = 0$

b) $\tan x = \sqrt{3}$

دويمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړي دي اوس دويمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی لـه:

$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d$

چې $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

c,b,a او d ثابت عددونه دي.

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y ليکو، او معادله داسې ليکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنۍ زاويه چې ساين يې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A = \begin{Bmatrix} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{Bmatrix} \quad k \in Z$$

او يا ليکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad , \quad n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2...$$

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{matrix} \qquad k \in Z \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل ست پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \ \Rightarrow\ (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \ \Rightarrow\ 2y = -1 \ \Rightarrow\ y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \ \Rightarrow\ y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{7\pi}{6}, 6\pi+\frac{7\pi}{6},\ \ \ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad ,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ n=0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \ \Rightarrow\ x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\left\{0^\circ\ ,\ \pi\ ,2\pi,3\pi\ ,4\pi,\ 5\pi\ ,\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\ \pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل ټولګه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 \ x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سيستمونو حل

د الجبري معادلو سيستم مو حل کړ. آيا د مثلثاتي معادلو سيستم حل کولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سيستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس يا زاويه ده، x او y مجهول قوسونه يا زاويې دي.يو له دغو سيستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ \ldots \ \text{I} \\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{II}\end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قيمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره ليکو، ځکه چې د دوو سينونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \ I \\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قيمت يعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \ I$$

د I اړيکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنۍ معادلې ښي لوری له $(+1)$ څخه لوی او له (-1) څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس يا زاويې سين دی. يا په بل عبارت مربع يې له يو څخه لوی نه دی.

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $0 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 1$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اړدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کېږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کین لوري شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

خرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 2x=\frac{2\pi}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

خرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړي.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کې لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

خرنګه چې $\sin x \sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x + y = \pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنګه پوهېږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو: $\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$

$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2-1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیدا کوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad , y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

دریم ګروپ: دغه ګروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کېږي چې دغه سیستم له دریم ګروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونـه پـه پورتنی اړیکه کې اړدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2}=\tan 15^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{x-y}{2}=15^\circ$$

$$x-y=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}\\ x-y=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$
$$y=\frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنۍ معادله کې اېږدو: $\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1\Rightarrow 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا: $$\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$$

نو:

$$\begin{cases}\tan x \cdot \tan y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \ldots\ldots \text{ II}\end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې اړدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow \tan y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

پنځم ګروپ: دغه ګروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a\end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له:

$$-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x + y = 7\dfrac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0\end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم ګروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$ او $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې ایږدو.

$$\tan x\tan y=\frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړۍ معادلې څخه په پورتنۍ اړیکه کې ایږدو:

$$\tan x\cdot\tan y=\frac{\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x\cdot\tan y=0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos 7\frac{\pi}{6}}=0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}=0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ x-y=\frac{5\pi}{6}$$

نومورۍ سیستم حلوو:

$$-\begin{cases}x-y=5\frac{\pi}{6}\\ x+y=7\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$2x=\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}=2\pi\quad,\qquad x=\pi$$

د x قیمت د I په معادله کې اړدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-1 \le \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېښې خواکې د صورت او مخرج قیمتونه د sin او cos له جنسه داسې اړدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

هغه کوچنۍ قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$
$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}.....I \\ x-y=\frac{\pi}{2}.....II \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$
$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$
$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$
$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a)$ $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

د ساين قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړيکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنۍ اړيکه د ساين د قانون په نوم يادېږي.

د کوساين قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی يې a,b او c وي، د ضلعو او زاويو تر منځ لاندې اړيکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاويو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړيکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې د ټولو قيمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سيستمونه

مثلثاتي معادلو سيستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د څېرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځېر سره ولولئ، هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې $A=20^\circ$, $b=10$, $c=7$ وي، د a ضلعې اوږدوالی يې عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a=8$, $b=5$ او $c=10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A=48^\circ$, $B=22^\circ$ او $a=5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x-\cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

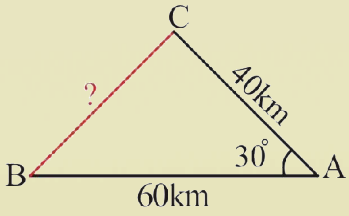
لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د $A=30^\circ$, $c=8$, $b=5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.

2. که په يوه مثلث کې $a=8$, $b=5$, $c=10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.

3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A=30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.

4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ $\sin\beta$ او $\cos\beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

a) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

b) $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

c) $\tan A+\cot A=2\csc 2A$

d) $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$

e) $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\frac{A}{2})$

f) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

a) $\cos^2 x+\cos^4 x=0$

b) $\tan^2 x-4\tan x+3=0$

c) $4\cos\beta-2=0$

d) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

e) $\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

a) $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

b) $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

c) $\cos 4x+2\sin^2 2x$

d) $(\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

a) $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

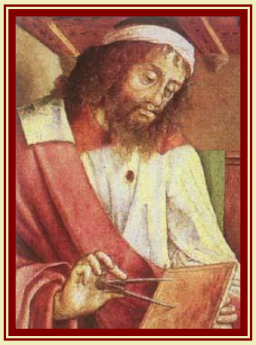
دریم ثپرکی

فضایي هندسه

د اقلیـدس تصـویر چـې نومـوړی د دوه بُعـدی او درې بُعدی هندسي بنسټ اړښودونکی دی.



اساسي مفاهيم او اکسيومونه



د اقليدس د هندسي مفـاهيمو څېړنـې پـه دوو بعـدونو
کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.
هغه هندسي مفـاهيم، چې پـه دريـو اړخونو(بعـدونو)
کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپـل مـنځ کـې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates: د هـر علـم پـه برخـه کـې د لومړنيـو اصـطلاحګانو څخـه سـترګې نشـو پټولای د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې چې پرته لـه کـوم تعريـف څخـه منـل کېـږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې لـه يـو لـړ مخکينيـو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکـې منـل شـوی وي. مـوږ هـم کولای شو، هغه و منو.

قضيهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نـقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مسـتقيم خـط مفهـوم او مطلـب بيـانوي. د مسـتقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مسـتقيمه کرښـه تيرېـدلای شـي مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نـقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط څرګندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ تر لږه دوې څرګندې نـقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تـر لـږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

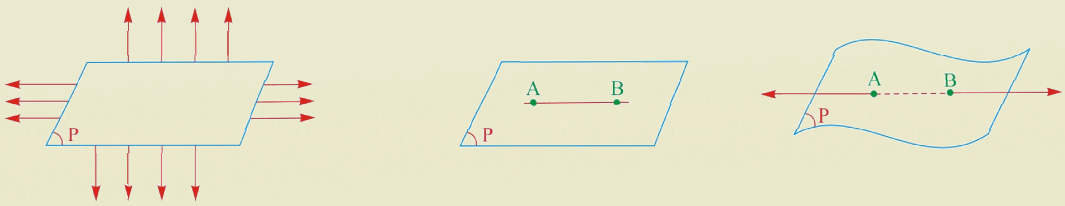
مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لـومړنۍ اصـطلاح (تعريـف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

دریم اصل: که چېرې د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي ځرګندوي رسمیږي، خو په فضایي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضایي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډېرې دي. زیاتره په فضایي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هواري سطحې په واسطه ښودل کېږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



مستوي نه ده　　محدوده مستوي　　نا محدوده مستوي

دا مستوي ګانې چې په پورته شکلونو کې لیدل کېږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي‌ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کېږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالېږي، په فضایي هندسه کې هم استعمالېږي.

هغه اکسیومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضایي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخېستل کېږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضایي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانېږي.

د مستوي لومړنۍ اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تېریږي.

د متقاطع مستوي‌ګانو اکسیوم: که چېرې دوې مستوي‌ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي‌ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړنۍ اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکي مېز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنۍ اصطلاح‌ګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي‌ګانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي



په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لري؟

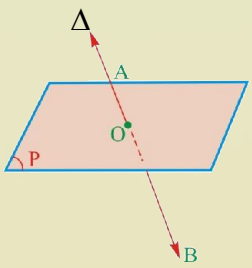
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

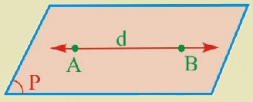
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د ستِ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

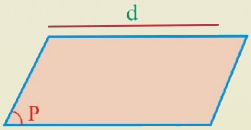
1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.



3. که چېرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



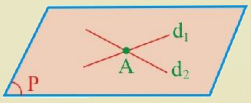
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چېرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نومورې خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو څخه لري.

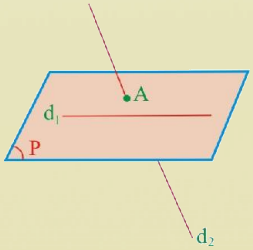
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډې نقطې ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه چې یوه ګډه نقطه ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.



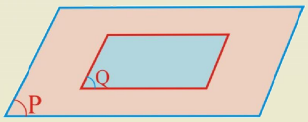
3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کېږي؟



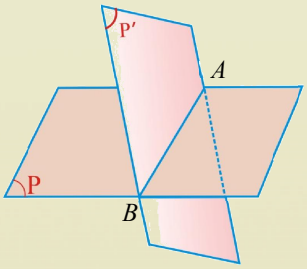
د دوو مستويګانو نسبي حالت:

په عمومي ډول دوې مستويګانې لاندې درې حالتونه لري.

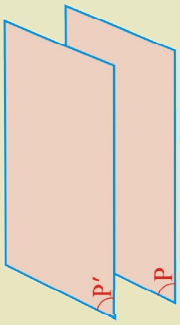
منطبق: که چېرې دوې مستويګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستويګانې بلل کېږي، لکه: په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستويګانې يو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: که چېرې دوې مستويګانې يو ګډ مستقيم خط ولري متقاطع مستويګانې بلل کيږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وايي. لکه: مخامخ شکل.



موازي: که چېرې دوه مستويګانې هيڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستويګانې.



فعاليت

- په فضا کې له يوې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له يوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي چې درې واړه نقطې يکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دليل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

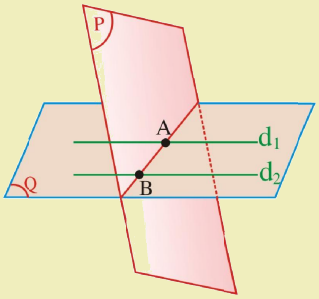
2- که د Δ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقيم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د AB مستقيم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د A, B او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د A, B او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستويګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري؟

په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



تعريف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسيوم:له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

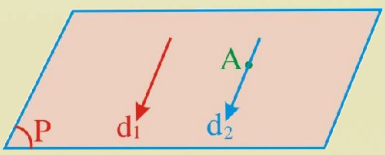
فعاليت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکی ورباندې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستويګانې تېريدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعاليت څخه د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: د يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مسقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تېريږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سمواله لري.

فعالیت

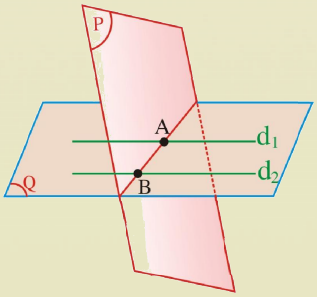
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکې کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستویګانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړي مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستویګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستویګانې یوه له بل په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې املې د P او Q مستویګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. ځکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

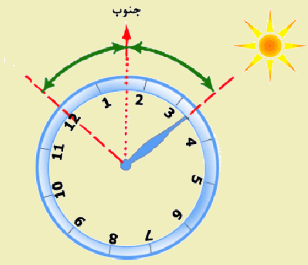
پوښتنې

1- که چېرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چېرې د E او F مستویګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



کـه چېرې د يـوې زاويـې دورانـي لـورى د سـاعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاويـه مثبـت او که د ساعت د عقربې په همجهـت(عين لـوري) وي زاويه منفي ده.

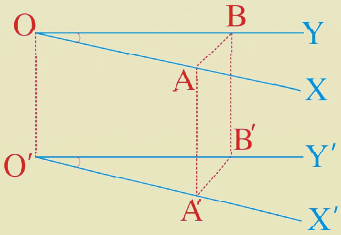
فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ لـه ضـلعو څخـه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مسـاوي قطعـه خطونـه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ لـه ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه ښکل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لـري، دليـل يـې ووياسـت، د OAB او $O'A'B'$ جـوړ شـوي مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولى شو.

قضيه: په فضا کې دوې زاويې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.

ثبـوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويـې پـه پـام کـې نيسـو، داسې چې $\overline{OX}\,//\,\overline{O'X'}$ او $\overline{OY}\,//\,\overline{O'Y'}$ دي، يو لـورى هـم لـري. پـه شـکل کـې د OX او $O'X'$ پـر خطونـو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.



نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعـه خطونـه مـوازي، مسـاوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ دى.

د OAB او $O'A'B'$ مثلثونه انطباق منـونکي دي. ځکـه $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{OA}=\overline{A'O'}$ او $\overline{OB}=\overline{O'B'}$ دي له دې امله $A\hat{O}B=A'\hat{O}'B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالی 180° دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي

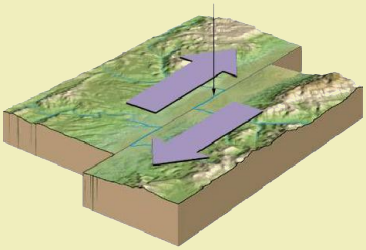
پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوې وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت يې کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستويګانې



يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.

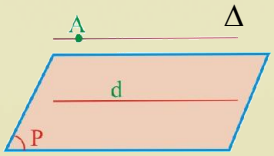
مستويګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعاليت

که چېرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مستقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کيدلای شي؟

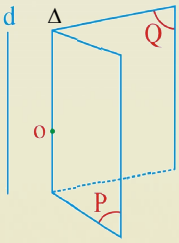
- دوې د P او Q متقاطع مستويګانې او يو مستقيم خط له دغو مستويګانو څخه بهر د P او Q له مستويګانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم(مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کيدای شي؟
- له يوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقيمو کرښو سره څو موازي مستويګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نومورې مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت: د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړي، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.

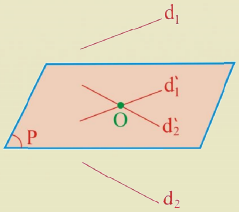
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستوي‌ګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستوي‌ګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.

که د P ، Q د مستوي‌ګانو د Δ په مشترک فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستوي‌ګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



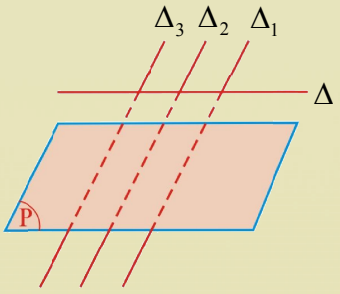
ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستوي‌ګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

2- که چېرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

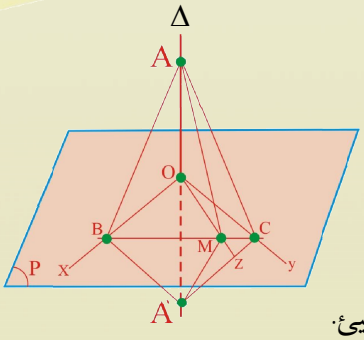


په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي ګانې



که د Δ مستقيمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آيا هغه ټول مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېريږي، د Δ په مستقيمې کرښې باندې عمود دي؟

فعاليت



- مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقيمونه د Δ په مستقيم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې ونسيئ.
- د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

يو اختياري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقيمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقيمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقيمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA'}$ سره څه اړيکه لري.

- د OZ مستقيمه کرښه د Δ پر مستقيمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت داسې بيانوو.

قضيه: که د Δ يوه مستقيمه کرښه پر هغو دوو مستقيمو کرښو چې دواړه د Δ مستقيمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقيمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تېريږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د (O) له نقطې څخه تېريږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځني عمودونه دي، نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$
$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عملیې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کېږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $\overset{\Delta}{A}\ A'\ M$ مثلث متساوي الساقين دی او د $\overline{MO}$ منځنی په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعالیت

- که د B او C نقطې د P او Q له يوې خوا څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌ګانې رسمولای شئ؟

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستوي ګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دي؟

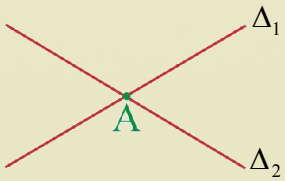
په فضا کې موازي مستوي ګانې



دوې مستوي ګانې چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسیئ
- له دې دوو مستقیمو خطونو او د A له نقطې څخه یوه مستوي تېرولی شو.
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقیمې کرښې چې په ترتیب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او یو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

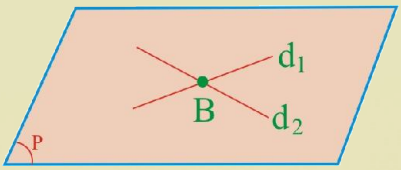


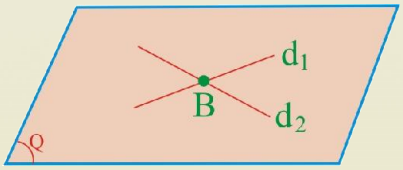
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقیمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړیکه لري؟

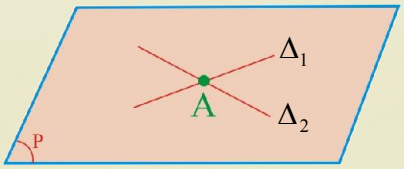
د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانولی شو.

قضیه: که د یوې مستوي دوې متقاطع مستقیمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقیمو کرښو سره موازي وي، نومورې مستوي ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او یوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقیم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم یوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي ګانې سره موازي دي.







څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د P او Q مستوي ګانې یو بل سره قطع کړې، مشترک فصل یې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستوي ګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چېرې د E او F مستوي ګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، مورِ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: مورِ نقطه د يو ذهنې مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم:هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم:له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېريږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسيوم:که چېرې دوه مستوي ګانې يوګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستقیمې کرښې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقیمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقیمونو تر منځ زاویه:په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاویې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقیمونه او مستوي: یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقیمونه او مستوي ګانې:

که د Δ مستقیم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقیمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې:دوې مستوي ګانې، چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کېږي.



د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړئ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی b _ د AB خط يې له منځه تېرېږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی d _ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تېرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تېرېږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی. b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د يو خط او د هغې له خارجې نقطې څخه d _ څلور متمايزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستويګانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نومورې مستويګانې د ياد شوي ټکي په امتداد کې شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0 b) 1 c) 2 d) بې شمېره

6- له لاندې څوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دی.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي او متمایز وي، نومورې خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

b _ که یو خط یو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که یو خط یوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

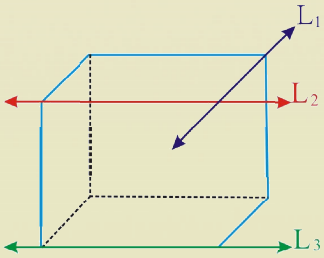
d _ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که چېرې د E او F مستوي ګاني یوله بله سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 // L_2$ دي؟

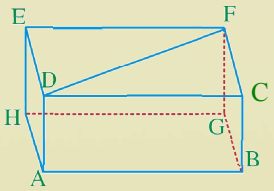
2- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوې سره موازي وي، نومورې خطونه خپل منځ کې عمود کېدای شي.

3- په لاندې مستطیل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



4- که د P_1 او P_2 مستويګاني د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګاني په خپل منځ کې موازي دي؟

5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.



a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمود وي او ووایئ ولې عمود دي؟

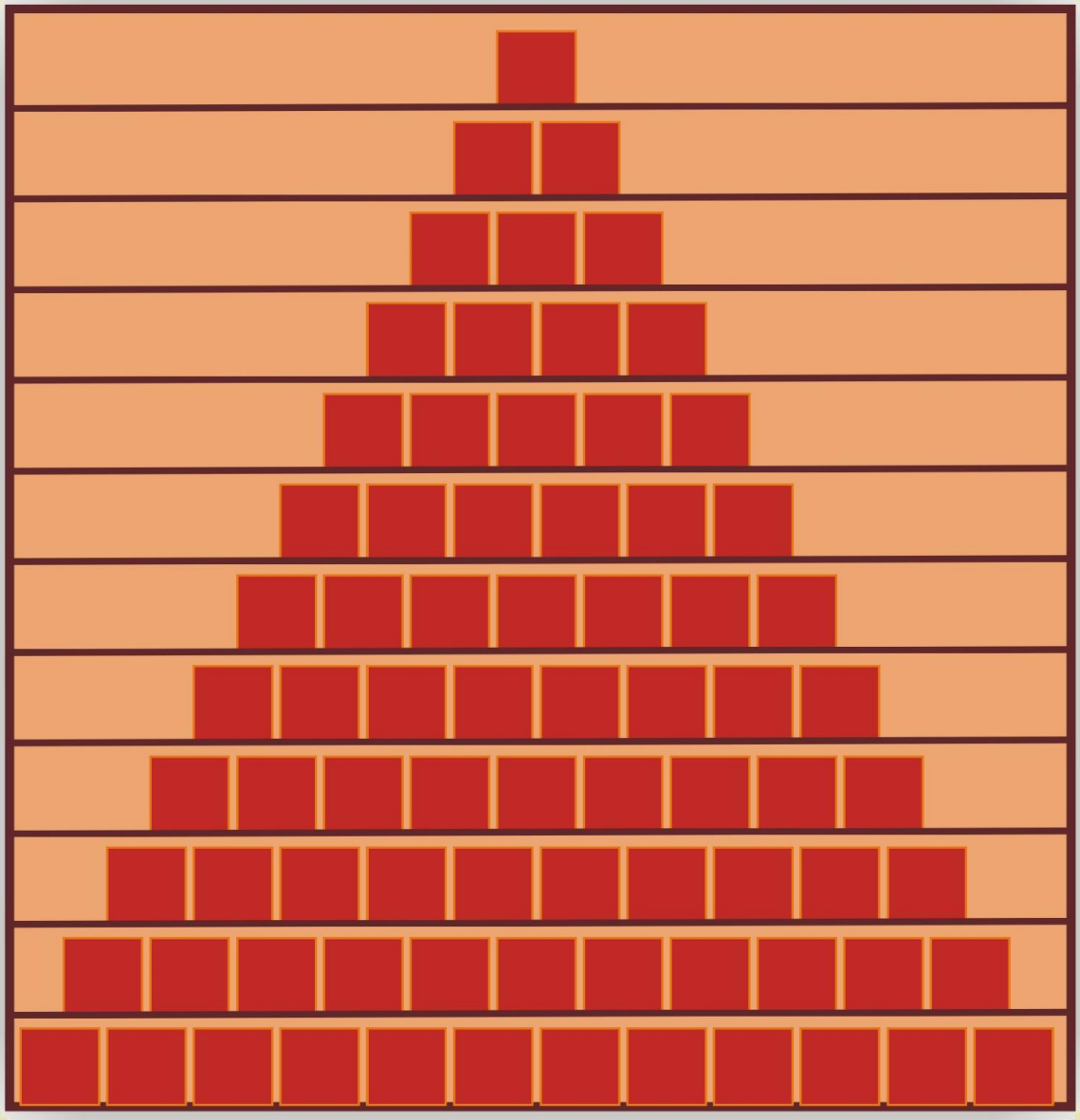
b _ د دریو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاویه قایمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاویه قایمه ده.

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې

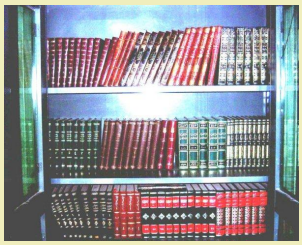


تـرادفـونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.



تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي، یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نومورې ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف $n-$ ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \ldots ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \ldots ,2n-1$
د 5 د مضربونو ترادف	$5,10,15,20, \ldots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ ام حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزاید ترادف بلل کېږي، لکه:

د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه:

د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دي، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36, \ldots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots \quad , \quad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$$

ليدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد دی، همدارنګه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادداښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

دويم مثال: د $1,2,4,8 \ldots$ ترادف په پام کې ونيسئ او $n-$ ام حد يې پيدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد يې $an = 2^{n-1}$ دی.

دريم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستې حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

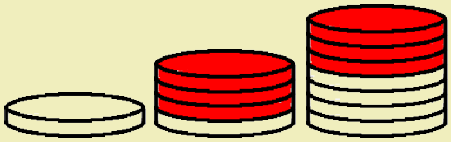
1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7, \ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots \end{array}\right\}$$

2- که يو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په يوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپير يې يو ثابت عدد وي ،دا ترادف په څه نوم يادېږي.

فعاليت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام کې ونيسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروسې حد ترمنځ توپير څو دی؟
- د پورتنيو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له کينې خوا څخه ښي خوا ته د پورتنيو عددونو ترادف وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف ويلای شو :

تعريف: که په يوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپير يو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم يادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپير (Common deference) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d يو مثبت عدد ($d>0$) وي، ترادف متزايد او که d منفي ($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=5-2=3 \\ d=8-5=3 \\ d=11-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دی نو ترادف متزايد دی.

دویم ترادف په پام کې نیسو: $4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} d=0-4=-4 \\ d=-4-0=-4 \\ d=-8-(-4)=-4 \\ d=-12-(-8)=-4 \\ d=-16-(-12)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ځرنګه چې $d<0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ اوګډ توپیر یې 2 وي.

حل: ځرنګه چې لومړی حد یې $a_1=\frac{3}{2}$ اوګډ توپیر یې $d=2$ دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots$

$a_2-a_1=d \ \Rightarrow\ a_2=a_1+d$

$a_3-a_2=d \ \Rightarrow\ a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$

$a_4-a_3=d \ \Rightarrow\ a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d),\ \ldots$

$\frac{3}{2}\ ,(\frac{3}{2}+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \ldots$

$\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\ ,\ \frac{11}{2}\ ,\ \frac{15}{2},\ \ldots$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \ldots$

$b)\ 1,2,4,8,16,\ \ldots$

د جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$

$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

bd جزء حل:



1 , 2 , 4 , 8 , 16

$$d = 2 - 1 = 1$$
$$d = 4 - 2 = 2$$
$$d = 8 - 4 = 4$$
$$d = 16 - 8 = 8$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a اوګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ldots$ ترادف په پام کې نیسو.

$$5, 7, 9, 11, \ldots$$
$$d = 7 - 5 = 2$$
$$5, 5+2, 5+2\cdot 2, 5+2\cdot 2\cdot 2, \ldots$$
$$a_1 = 5,\ a_2 = 5+2\cdot 2,\ a_3 = 5+2\cdot 2\cdot 2, \ldots$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$a_1, (a_1+d), (a_1+2d), (a_1+3d), \ldots$$

په عمومي ډول لیکلای شو چې:

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توګه کولای شو وليکو چې:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	.....	$a+(n-1)d$
↓	↓	↓	↓		↓
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a ، d ، n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه . . . , 12 , 5 , -2 حسابي ترادف 30 - ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ d = 5-(-2) = 7 \\ n = 30 \\ a_{30} = ? \end{array}\right| \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{array}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35 \ , \ 40 \ , \ 45 \ , \ldots \ , 2000$$

حل: پوهېږو چې:

$$a_n = a + (n-1)d$$
$$2000 = 35 + 5n - 5$$
$$2000 = 30 + 5n$$
$$2000 - 30 = 5n$$
$$1970 = 5n \Rightarrow n = 394$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 35 \\ d = 40 - 35 = 5 \\ a_n = 2000 \end{array}\right.$$

فعالیت

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1} \quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}}, \underbrace{2x-4}_{a_n}, \underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف پې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4 \Rightarrow 4x-5x=4+8=12 \Rightarrow -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف پې عبارت دی له: $3(-12)+3$, $2(-12)-4$, $2(-12)+1$

$$-24+1, -24-4, -36+3 \Rightarrow -23, -28, -33, -38, -43, \ldots\ldots$$

یاددښت

که د یوه حسابي ترادف $n-$ ام او $m-$ ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d \quad \ldots\ldots\ldots I$$
$$a_m=a+(m-1)d \quad \ldots\ldots\ldots II$$

نـو د I اړيکـې څخـه II اړيکـه کمـوو، پـه پايلـه کـې کـولای شـو ګـډ تـوپير داسـې پـه لاس راوړو $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په ياد شوي فورمول کې d ګډ تـوپير، a_n د تـرادف $n-$ام حد ، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

دريم مثال: د يوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد يې 47 دی، ګډ تـوپير او لـومړی حـد يـې پيـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه وليکئ.

$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47 \\ n=9 \\ a_m=27 \\ m=5 \\ d=? \\ a=? \end{array}\right| \begin{array}{l} d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{47-27}{9-5}=\frac{20}{4}=5 \\ d=5 \\ a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 47=a_1+(9-1)5=a+40 \\ \Rightarrow 47-40=a_1 \Rightarrow a_1=7 \end{array}$$

ترادف يې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونيکي ترادف:د $\{a_n\}$ يوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وايي چې معکوس يې $b_n=\frac{1}{a_n}$ يو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: **د** $2,4,6,8,10,\ldots$ تـرادف يـو حسـابي تـرادف دی، ځکـه چـې $d=2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس يعنې $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\ldots$ يو هارمونيکي ترادف تشکيلوي.

دويم مثال: د طبيعي عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی. $n-$ ام حد يې وليکئ.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n}$$

$$\{a_n\}=\frac{1}{n}$$

دريم مثال : كه چېرې په يوه هارمونيکې ترادف کې $a_1=\frac{1}{4}$ او $d=-3$ وي، هارمونيکې ترادف يې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\ (\frac{1}{4}-3)\ ,\ (\frac{1}{4}-3-3)\ ,\ (\frac{1}{4}-3-3-3)\ ,\ (\frac{1}{4}-3-3-3-3)\ ,\ ...$$

$$\frac{1}{4}\ ,\ -\frac{11}{4}\ ,\ -\frac{23}{4}\ ,\ -\frac{35}{4}\ ,\ -\frac{47}{4}\ ,\ ...$$

فعاليت:

آيا د طبيعي طاقو عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی، $n-$ ام حد يې وليکئ.

هـارمونيکي حسـابي اوسـط: کـه درې مسلسـل عناصـر $a_{n-1}\ ,\ a_n$ او a_{n+1} پـه داسې حـال کې چې $n=2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ...$ دی، له يوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د يوه هارمونيک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1}\cdot a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پايله کې پورتنۍ اړيکه چې هارمونيک حسابي اوسط ښيي، ليکلای شو:

$$\boxed{a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونيکي اوسط پيدا کړئ.

حل: له $a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخيستنې سره لرو چې:

$$a_n=\frac{2(2\cdot 8)}{2+8}=\frac{2\cdot 16}{10}=\frac{16}{5}=3.2$$

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ \ldots$

2- آیا $1,\frac{5}{4}\ ,\ \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_{10}=\frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

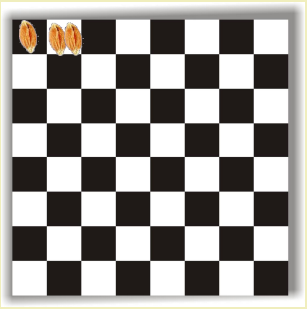
5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

a) $2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{11}{4},\ \ldots$

b) $3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12,\ \ldots$

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستۍ خانه کې د مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \quad n = 1,2,3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

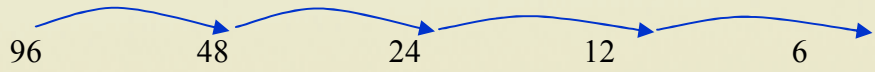
$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $96 , 48 , 24 , 12 , 6 , \ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ ،ګډ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد یې په مخکینې حد باندې وېشو:



$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

لیدل کېږی چې $q=\frac{1}{2}$ یو ثابت عدد وی.

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید د ی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $100,300,900,2700,\ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او ووایاست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

لومړی حد $= a=2700$

ګډ نسبت $= q=\frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حدد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots an$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	$, \ldots ,$	a_n
↓	↓	↓	↓	$, \ldots ,$	↓
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	$, \ldots ,$	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40, \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_6 = 5(-2)^{6-1} \\ a_6 = 5(-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5(-32) \\ a_6 = -160 \end{array}$$

دویم مثال: **د** ..... $,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8$ هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_{12} = 8(\dfrac{1}{2})^{12-1} = 8(\dfrac{1}{2})^{11} = 8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12} = \dfrac{8}{2^{11}} = \dfrac{2^3}{2^{11}} = 2^{3-11} = 2^{-8} = \dfrac{1}{2^8} = \dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د M, a او M, b ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} \ q=q \ \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \ \Rightarrow M^2 = a\cdot b$$

$$M = \sqrt{a\cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط (Geometric mean) وایي.

دريم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پيدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=12 \end{matrix}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پيدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_5=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\frac{32}{2}=16 \Rightarrow q^4=16 \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{matrix}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 يا $2,4,8,16,32$

فعاليت

- که په هندسي ترادف کې a_n ، $n-$ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پيدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه يو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \ x+3 \ , \ x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \ x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

a) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$

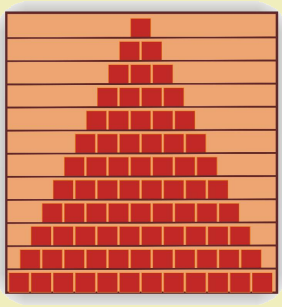
b) $-4,-2,0,2,4, \ldots$

3- د $\ldots, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟

فعالیت

- د $2,4,6,8,\ \ldots$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعې حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو پرله پسې حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعې حاصل وليکئ.

له پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړي د n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړی حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو n – ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل يې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړيو حدونو a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n د جمعې حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبيعي عددونه اخلي، د i انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum_{i=1}^{7} \sum \frac{1}{1^i}$) په انکشافی شکل ولیکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} = \frac{1089}{420}$

دویم مثال: لاندې د جمعې حاصل د ($\sum$) په شکل ولیکئ.

a) $1+3+5+7+\ \ldots\ +(2n-1)$

b) $1+4+9+\ \ldots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \ldots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = 4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ldots+n(n+2)$$
$$= 4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+\ldots+n(n+2)$$
$$= 24+35+48+63+\ldots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} = \frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$= \frac{4032+3888+3780+3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}$$

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وخېړه، که وغواړو د یـوه تـرادف $\{a_n\}_{n\in IN}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې(Series) په نامه یادېږي.

د $a_1+a_2+a_3+\ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمـومي حـد بلـل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کـړو، خوپـه ریاضـي کـې د ځینـو قاعـدو پـه کارولوسره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوي مجموعې نسبت ورکړو، خو دلتـه غـواړو د یـوې سلسـلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\sum_{i=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو:.

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6=1+2+3+4+5+6=21$$
$$S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c یو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \ldots\ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$



پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{19}{20}$

$b)\ 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

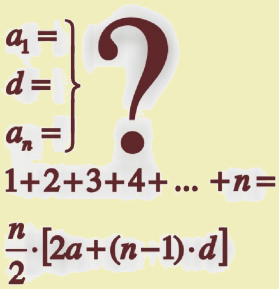
$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ $\qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه

که $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ د يوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟



که چېرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. يا په بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونود جمعي لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_{11} + 3d) + ... + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad ... \text{ I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + ... + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad ... \text{ II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + a_1 + a_n}_{n \text{ ځلې } n(a+a_n)}$$

$$2S = n(a + a_n) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a + a_n) ... \text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad \text{..... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right| \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \Rightarrow S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او n – ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8+\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow \quad S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\ldots)$ د 200 لومړیوحدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \quad \Rightarrow \quad S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

څلورم مثال: د $2+4+\ldots+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پیدا کړئ.

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نومړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

i) $2,0,-2,-4,\ ...$

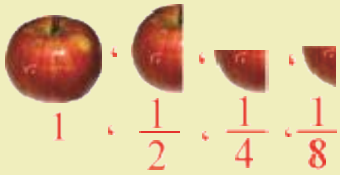
ii) $1,5,9,13,\ ...$

iii) $-2,-1,0,1,2,\ ...$

2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ ...$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

a) S_8 *b*) S_{10}

د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل



که چېرې يوه مېنه نيمه او نيمه بيا نيمه او همداسې ادامه ورکړو يو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نيولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل يې مساوي په 2 مېنو شي.

فعاليت

- يو هندسي ترادف چې لومړۍ جمله يې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت يې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعاليت سرته ورسوئ.
- د ترادف دويمه جمله څو ده؟
- که چېرې دو يمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل يې له دريمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پيدا کولو لپاره څه وړانديز لرئ؟

پايله:

په يوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکيني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره يوه باوري خبره ده، په دې ډول د يوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې د حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n)$ قيمت عبارت دی، له: $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

د پورتنۍ اړيکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ ... \ + a_1q^{n-1} \quad ..... \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ ... \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad ..... \ II$$

له I اړيکې څخه د II اړيکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتني رابطې صورت او مخرج په (-1) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

پاسنۍ اړيکه هغه اړيکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 & a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 & a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.



پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قیمت پیدا کړئ.

لايتناهي هندسي سلسلې

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-q}\ ,\ |q|<1$$

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره ليدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنۍ کېږي.

آيا هر هندسي ترادف يوه عدد ته نږدې کېږي؟

که چېرې په يوه هندسي سلسله کې $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه يادېږي.

او که چېرې $|q|<1$ وي، د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه يادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پيدا کولو فورمول:

$$S=a\frac{1-q^n}{1-q}=a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)}=a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهايته وي، يعنې $n\to\infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_{\infty}=\frac{aq^{\infty}-a}{q-1}=\frac{aq^{\infty}-a}{q-1}=\frac{\infty-a}{q-1}=\infty\Rightarrow S_{\infty}=\infty$$

که سلسله متقاربه وي($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهايت وي، نو $q^n\to 0$ کوي.

$$S=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\Rightarrow S_{\infty}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a-a\cdot 0}{1-q}=\frac{a}{1-q}$$

يعنې که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر يې بې نهايت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له:

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-q}$$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323\ldots=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ \ldots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ \ldots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ \ldots\ ]$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدیې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت یې $\frac{1}{100}$ دی.

په پاسنۍ سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنۍ سلسله کې $a=0.3$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

i) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, *ii*) $5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

a) $0.2\overline{4}$ *b*) $0.\overline{5}$

د ترادف تعريف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه يادېږي.

پورتني هر يوه عدد ته د ترادف حد يا جمله وايي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی يا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعريف ناحيه يې طبيعي عددونه او د قيمتونو ناحيه يې حقيقي عددونه تشکيلوي.

حسابي ترادف: که په يوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپير يو ثابت عدد وي، نو نومورې ترادف د حسابي ترادف په نامه يادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، نو: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکيني حد تر منځ نسبت يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1} ، a_n ، a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n = \sum_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهايته سلسلې (Series) په نامه يادېږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = \ \dots + a_3 + a_2 + a_1$ د نومورې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړيو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q| < 1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايته وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايته ده، يعنې $S_n = \infty$



د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. د $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots$ ترادف n – ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $c)\ \frac{n}{n-1}$ $d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n=\frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف n – ام حد وي، د دغه ترادف څوومم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

3. د $-9,-5,-1,3,\ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $b)\ 38$ $c)\ -35$ $d)\ -38$

4. د $0.1,0.4,0.7,1,1.3,\ldots$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $b)\ 0.1$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96,48,24,12,6,\ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5,\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{16},\ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $b)\ \frac{5}{510}$ $c)\ -\frac{5}{512}$ $d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n=a\frac{1+q^n}{1-q}$ $b)\ S=a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S=a\frac{1+q^n}{1+q}$ $d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $b)\ |q|>1$ $c)\ |q|<1$ $d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په ښلا ښل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21,\square,\square,\square,31$
3. که ديوه حسابي ترادف د لومړۍ او وروستۍ جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نومورې ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3,5,7,9,11,\ \ldots$$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي، گډ نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره، د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نومورې ترادف گډ نسبت حساب کړئ.
7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1+0.01+0.001+0.0001+\ldots$$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نومورې ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په ښلا ښل ډول وليکئ.

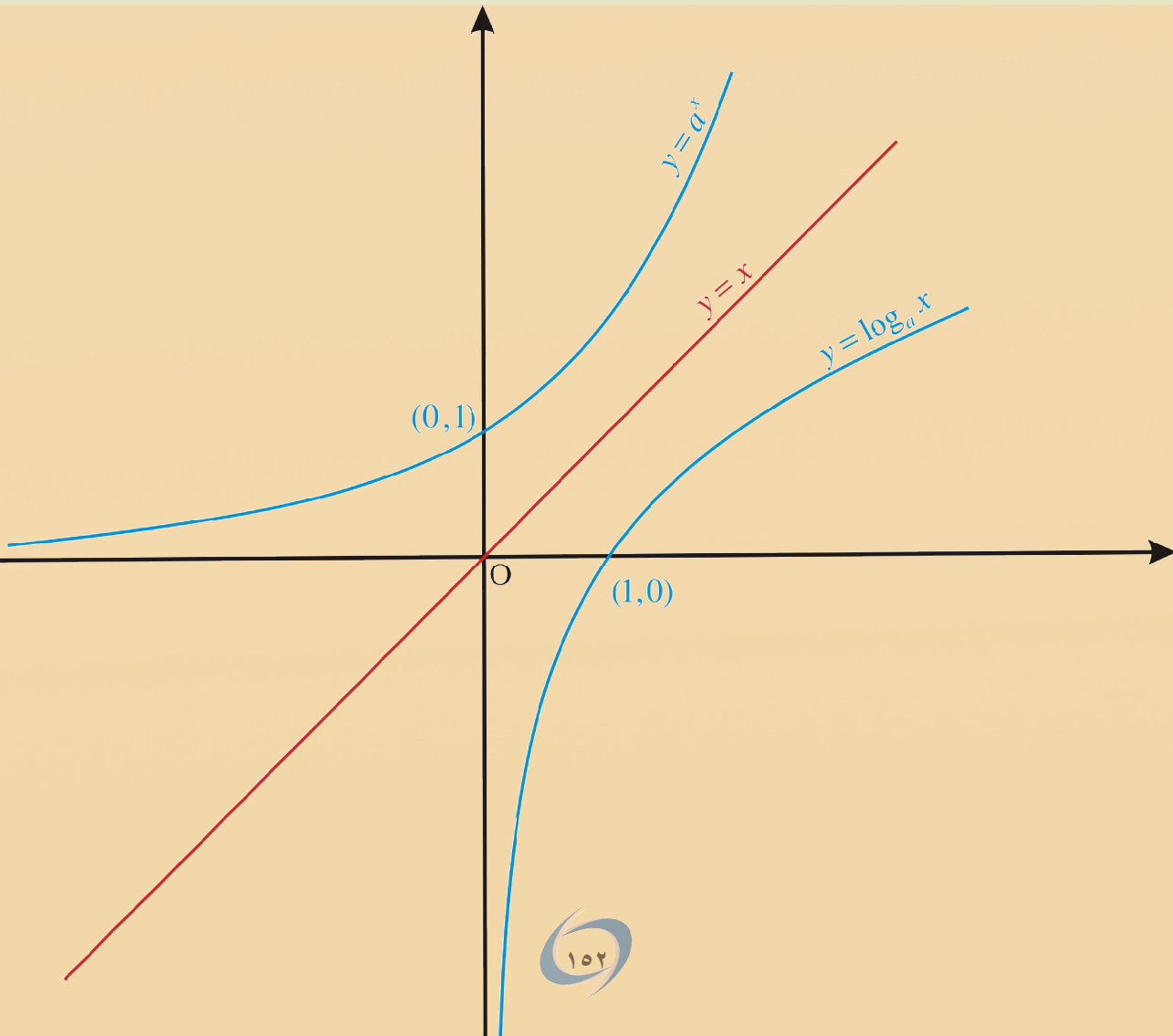
$$3,\square,\square,\square,\square,96$$

10. د $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که $a=4$ او $d=3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n=12$ لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

a) $2.\overline{8}$ *b*) $3.\overline{57}$

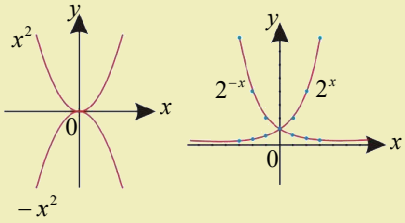
پنځم څپرکی

لوګاریتم


$y = a^x$
$y = x$
$y = \log_a x$
(0, 1)
O
(1, 0)

اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function



پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چېرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\quad,\quad x\in IR\quad,\quad f:\ IR\to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانوګرافونه دوضعیه کمیاتوپه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

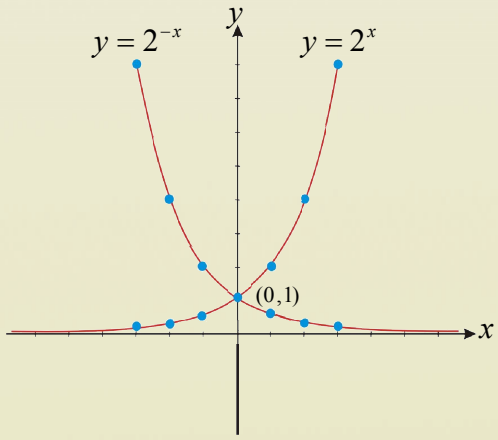
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یوپه یو متناظر دی.

یاددښت: که چېرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.



د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

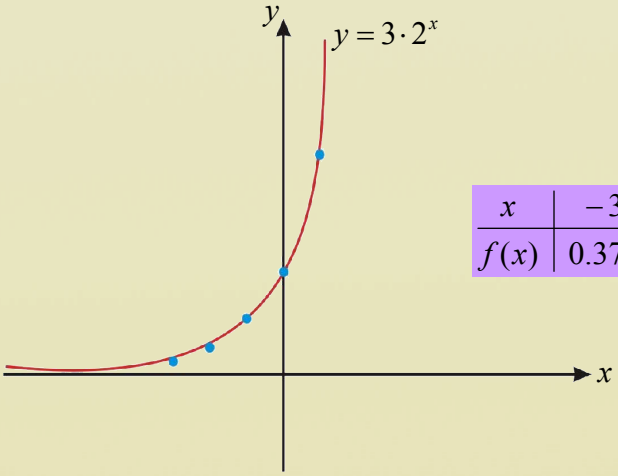
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپونشیل تابع ګراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهېږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپونشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپونشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپونشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپونشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپونشیل تابع یوې یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3. هره اکسپونشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
4. د هرې اکسپونشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تېریږي.
5. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپونشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
6. هره اکسپونشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپونشیل تابع ګانو ګرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

a) $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$

b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

c) $f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

d) $f(x) = (4)^{-x}$

لـوګاريـتم

Logarithm

آيـا کـولای شـئ چې اکسپوننشـيل تـابع پـه بـل ډول هـم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړکړئ

$y =$ درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
$a^x =$ طاقت لرونکي عددونه		10^{-3}				10^4
$x =$ توان	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد يوې بېلې ښوونې تـه لوګاريتم وايـي، يـا پـه بـل عبـارت د مجهـول تـوان محاسـبه د لوګاريتم په نامه يادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنۍ اړیکه کې a ته د لوګاريتم قاعده (Base) او y ته لوګاريتمي عدد وايي، د يوه طاقت لرونکي عدد توان له لوګاريتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تېر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاريتم څخه عبارت دی.

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$



پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

a) $\log_{10} N = x$

b) $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

c) $\log_9 81 = 2$

d) $\log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکی عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکی

a) $4^3 = 256$

b) $2^5 = 32$

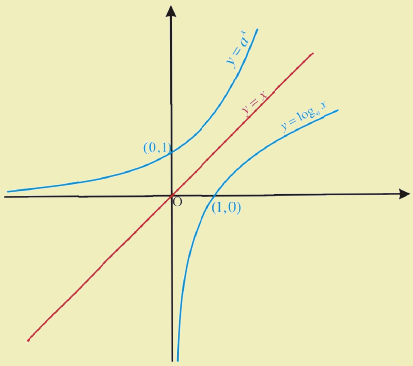
c) $10^4 = 10000$

d) $10^{-1} = 10^y$

e) $y = 2^x$

f) $y = 3^x$

لوګاريتمي تابع ګاني



آيا ويلی شي چې کوم دول تابع ګاني معکوسې تابعګاني لري؟

آيا ويلی شی هغه تابع ګاني چې معکوسه لري، په قايمو مختصاتو کې نظر کوم مستقيم خط ته متناظري دي.

تعريف: د اکسپونشيل تابع معکوسه تابع د لوګاريتمي تابع په نامه يادېږي او هره اکسپونشيل تابع لوګاريتمي تابع ده.

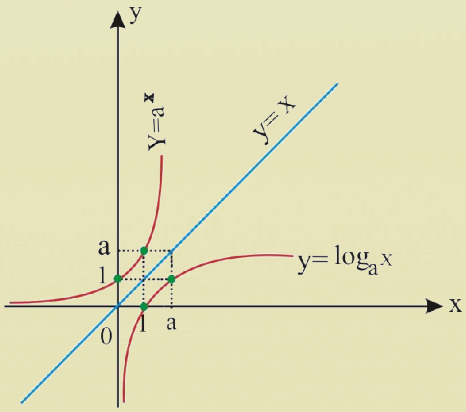
د يوې $(a \neq 1$ او $a \in IR^+)$ اکسپونشيل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاريتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کېږي.

هره لوګاريتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګاني يو د بل معکوسې تابعګاني او ګرافونه يې د $y = x$ مستقيم ته منتاظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : IR^+ \to IR, f^{-1}(x) = \log_a x, \; a \in IR^+, \; a \neq 1$$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

له پورتني جدول څخه ليدل کېږي:

که چېرې $a>1$ وي، نود $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=0$ لپاره $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

لومړی مثال: د $y=3^x$ او $y=\log_3 x$ تابع‌ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y=3^x$ تابع په پام کې نیسو:

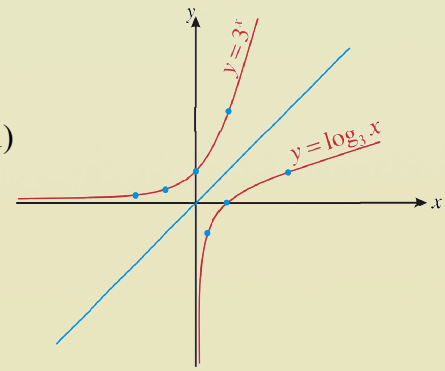
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y=\log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{matrix}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{matrix}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3} = y=\log_3 3^{-1} = -1 \end{matrix}\right\} (\frac{1}{3},-1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y=(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابع ګانود ګراف په پام کې نېولو سره او د اکسپوننشیل تابع ګانو د تعریف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوګاریتمي تابع ګانو قیمتونه د $x=1,2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوګاریتمي تابع لکه: $y=\log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a \in IR$, $a > 0$, $a \neq 1$

دویم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړی.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پر ځای قیمتونه اېږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$
$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$
$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمي تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیږي.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېریږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$
$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2 (\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28,\sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2),f(1),f(\frac{1}{32}),f(32)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

او طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي، او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کېدلی شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N\\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعريف

څرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کيدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خوپه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 – معمولی لوګاريتم: هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا Briggs سيستم) په نامه يادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سيستم منځ ته راوړی دی

معمولی لوګاريتم د log په سمبول يې ښيي او په لاندی ډول ښودل کېږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR \ , \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

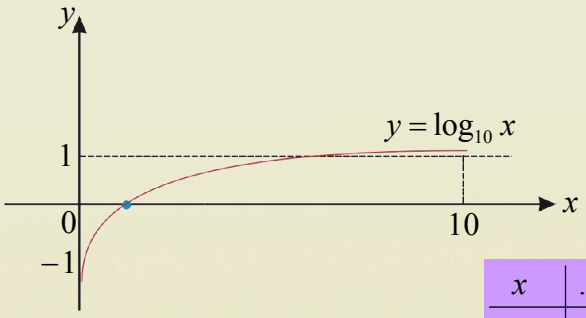
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z \ , \quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$\ldots 10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$\ldots -3$	-2	-1	0	1	2	3

2– طبیعی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کېږي، او داسې لیکو: $f : IR^{+} \to IR, F(x) = \log_e x = \ln x$:

e یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^{x}$ لیمټ څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیدا کول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x) = e^{x}$ تابع د اکسپونشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^{x}$

د $y = e^{x}$ تابع ګراف لکه: $y = a^{x}$ تابع ګراف په څېر ده.

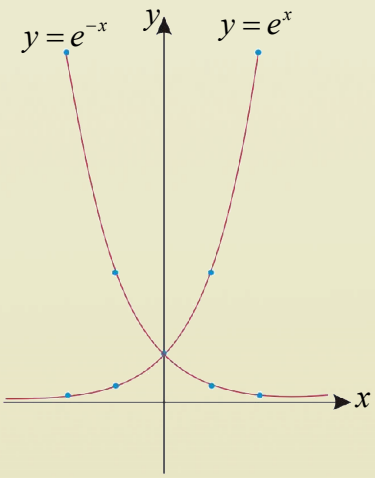
د $y = e^{x}$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y = e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابع‌ګانو ګرافونه رسموو:



د طبيعي لوګاريتم مطالعه په لوړو رياضياتوکې لکه: ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

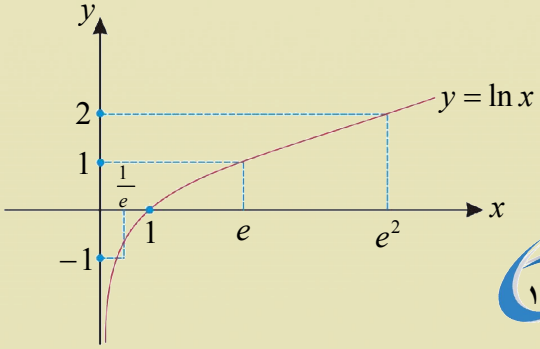
د طبيعي لوګاريتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}, \ln e^{0}, \ln e^{2}, \ln e^{3}$ او $\ln e^{1}$ پيدا کړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



فعالیت

- د $y = \ln \frac{1}{e^7}$ قیمت پیدا کړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a) \log_e e^8$

$b) \ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c) \log 0.01$

$d) \log \frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاريتم قوانين

Low of logarithm

پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانين لري، آيا د عددونو لوګاريتم هم قوانين لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فعاليت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون وليکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسيم قانون وليکئ.
- هر عدد د صفر او يا د يوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانينو ته ورته لوګاريتم هم ځينې قوانين لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاريتم د لوګاريتم د تعريف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په يو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+ ,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $a^1 = a$ $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دويم قانون: د 1 عدد لوګاريتم په هره اختياري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $a^0 = 1$ $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دويم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دريم قانون: د دوو يا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاريتم د هغو د لوګاريتمونو له مجموعې سره مساوي دی يعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چېرې ولرون.

$$x = a^p \quad \ldots \text{I}$$

$$y = a^q \quad \ldots \text{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوو لوګاریتم نیسو: $\log_a (x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په اړنوډلو سره لیکو: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 (2 \cdot 8) = \log_4 (2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4 (4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

څلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قیمتونو په اړنوډلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 5 = 0.6900, \log 2 = 0.3010$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دویم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له بنې لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوګاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاریتم له حاصل ضرب سره یعنې که چېرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot \ ...\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + ... + \log_a x}_{lag_a x \text{ خلې } n}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوګاریتم $\log_3 \sqrt[3]{9}$ پیدا کړئ؟

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعالیت

- لاندې لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\log_5 \sqrt{8} = ?$

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل وليکئ او د امکان په صورت کې يې وروستی قيمت په لاس راوړئ.

a) $\log_4(5x^2) = ?$

b) $\log_{10}(10x^2y) = ?$

c) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

d) $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

a) $\log_7 \frac{63}{49} = ?$

b) $\log \frac{125}{80} = ?$

c) $\log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

d) $\log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاريتمونه حساب کړئ.

a) $\log_{10}(0.0001)$

b) $\log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، څرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت:د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل یې یعنې $m = b^y$ لیکو اوس له اطرافو څخه د a په قاعده لوګاریتم نیسو: $\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$

اوس د y قیمت په پورتني اړیکه کې ایږدو: $\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد ېږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \ldots I$

د I په رابطه کې د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې $1 = \log_M M$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت اېږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$

اوس د m په ځای قیمت اړدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتنې قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

1) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ 2) $\log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x$ 3) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چېرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

خرنګه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

لومړي مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په ګټې اخیستې سره لروچې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$



پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$

b) $\log_9 27 = ?$

c) $\log_8 4 = ?$

d) $\log_{121} 14641 = ?$

e) $\ln 672000$

f) $\ln 0.00927$

g) $\ln 0.235$

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{matrix}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{matrix}\right\} = ?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3$, $\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S \cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n \log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$

$$0 \le \log S < 1$$

له پورتنۍ اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګاریتمي یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^{0}$	$1000 = 10^{3}$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^{1}$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0 ، 10 ، 100 ، 1000 ، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څوسره دي؟

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چېرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څېر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a)$ $2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)$ $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)$ $0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

دويم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرستيک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحيح ارقامو شمېرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرستيک يې $3-1=2$ دی.

او له يوه څخه د کوچنيو عددونو کرکټرستيک منفي علامه لري او قيمت يې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د يوه په اندازه زيات دی.

دريم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرستيک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\log 0.002 = \log(2\cdot 10^{-3})$$
$$= \log 2 + \log 10^{-3}$$
$$= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3$$

نو کرکټرستيک يې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخيستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرستيک په لاس راوړو.

لوګاريتمونه		کرکټرستيک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

a) $\log 0.9560$ *b*) $\log 956.0$

d) $\log 2345$ *e*) $\log 3.875$

c) $\log 9560$ *f*) $\log 0.0009560$

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو(کرکټرستیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهېږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول یې تر څېنې 7 ، تر 5 او څېنې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره تر ټولو اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس — کرکټرستیک

د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او د مانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74						↓				
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 7.09 عدد مانتيس 0.8506 دی، په پايله کې يې لوګاريتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دريم مثال: د 0.0247 لوګاريتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو، مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5\cdot 3\cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9\cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7\cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$



پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

a) $\log 222$ *b*) $\log 0.921$

c) $\log 928$ *d*) $\log 527$

e) $\log 0.024$ *f*) $\log 2400$

h) $\log 0.00024$ *j*) $\log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

a) $\log(2.73)^3$ *b*) $\log\sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاريتم

Anti Logarithm

که چيرې د يوه عدد لوګاريتم راکړل شوی وي څرنګه کولای شو، عدد يې پيدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعريف: که چېرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاريتم انتي لوګاريتم بلل کېږي يعنې $y = anti \log x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاريتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعاليت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرستيک پيدا کړئ.
- د مانتيس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرستيک دی، نو N يو درې رقمي عدد دی، مانتيس يې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړي مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاريتم د مانتيس برخه يعنې 0.9939 د لوګاريتم په جدول کې پيدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې ليکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه يعنې د 986 عدد مانتيس 0.9939 دی. په پورتنۍ پوښتنه کې 2 د کرکټرستيک په توګه راکړل شوی، نو د صحيح رقمونو شمېرې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 يعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti \log 2.9939 = 986$

9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

دویم مثال: که چېرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څیر لیکو، څرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$
$$\log 9.53 = 0.9791$$
$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کې لیدل کېږي چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټرستیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)$ 2 $b)$ 0.2 $c)$ 0.02 $d)$ 0.0002

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغېزه نه لري.

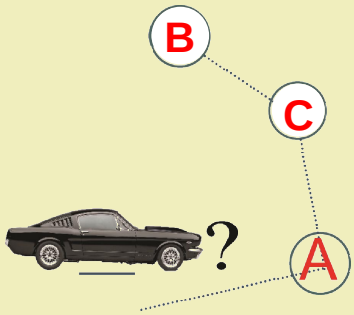
پوښتنې

دلاندې هر یوه انتي لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $b)\ anti\log -5.0521$

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



یوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقو کې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسېږي، ووایاست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسېږي.

فعالیت

- کـه چېـرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکـړل شـوی وي او $\log C = c$ وي، پـه داسـې حـال کـې چـې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول ووایاست چې که (a, b) یوبل ته نژدي عددونه وي، نود C لوګاریتم چېرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چېرې دیوه نامعلوم قیمت د پیدا کولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعـددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، په دې صورت کې نوموړي طریقه د خطي انټرپولېشن په نامه یادېږي.

که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له درې رقمي جدول څخـه پـه لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پیدا کولای شو.

لومړې مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جـدول کـې نشـته، خـو د 5.230 او 5.240 عددونوپـه مـنځ کـې پراته دي چې لوګاریتمونه یې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چېرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

	لوګاریتمونه	عددونه
د لوګاریتمونو توپیر 0.0008	0.7193	5.240
	x	5.235
	0.7185	5.230
0.010 د عددونو توپیر	d	0.005

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$

$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال:د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\log 0.0007957=\log(7.957\cdot 10^{-4})$$
$$=\log 7.957+\log 10^{-4}$$
$$=\log 7.957-4\log 10$$
$$=\log 7.957-4$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې 4 – دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$

$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

	لوګاریتمونه	عددونه
	0.9009	7.96
د لوګاریتمونو توپیر 0.0005	x	7.957
	0.9004	7.950

د عددونو توپیر 0.01

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $x = anti\log 4.5544$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتنۍ اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تېرې شان تشکیلوو.

	مانتیسونه	عددونه
	0.5551	3.59
د مانتیسونو توپیر 0.0012	0.5544	t
	0.5539	3.58

د عددونو توپیر 0.01 ، 0.0005

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیدا کولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$



پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د X او Z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582$ $\qquad$ $b)\quad x = \log 6.289$

لوګاريتمي او اکسپوننشيل معادلې

Exponential and logarithmic equations

آيا تر اوسه مود $5^{x}=5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د

حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قيمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قيمت وټاکو.

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^{x}=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

تعريف

هغه معادلې چې توانونه يې مجهول وي، دا اکسپوننشيل معادلو په نامه يادېږي، د مجهول د پيدا کولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانينو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه يې هم يو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قيمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^{5} \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دويم مثال: د $8^{3x-1}=2^{4}$ اکسپوننشيل معادله حل او وازمويئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^{4}$$

$$(2^{3})^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^{4}$$

څرنګه چې قاعدې يو له بل سره مساوی دي، نو توانونه يې هم مساوی دي؛ نو ليکو:

$$3(3x-1)=4$$

$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$

$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3^{\frac{7}{9}-1}} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- په $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږی. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په ګټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

دویم مثال: په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x+2=81 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \Rightarrow x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Rightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot 3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \quad , \quad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2 \Rightarrow \log_3 2=x \Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$



پوښتنې

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

a) $(11)^{3x-1}=11$

b) $7^{2x-1}=3^{x+3}$

c) $\log\sqrt{x}+3=4$

d) $\log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

دریاضیکي عملیوپه سرته رسولوکي له لوګاریتم څخه کار اخیستنه

آیا کولای شو د اعشاري عددونو عملیې لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوګاریتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{matrix}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{matrix}\right\}=?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوګاریتم په مرسته: کولای شو ددوو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاریتم د لاندې قانون له مخې پیدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال:غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

لیدل کېږي چې د 0.4466 مانتیس عدد په جدول کې نشته، خو 0.4456 او 0.4472 مانتیسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه لیدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

	عددونه	مانتیسونه	
د مانتیسونو توپیر 0.0016	2.79	0.4456	
	t	0.4466	0.0006
د عددونو توپیر 0.01	2.80	0.4472	

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږی؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې : $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل: $\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم لـه لوګـاریتم څخـه د مقسـوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغـه تفـاوت انتـي لوګـاریتم پـه لاس راوړو چې داد مطلـوب خـارج قسـمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه یې تام اویا کسرونه وي، د لوګاریتم له پـنځم قـانون څخـه کـار اخلو یعنې $\log M^n = n \log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti \log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لـومړی د عـدد تـوان پـه لوګـاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)$ $\dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

اکسپونشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپونشیل تابع د a په قاعده نومېږي.

د اکسپونشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپونشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپونشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0,1)$ له ټکي څخه تېریږي.
- د اکسپونشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپونشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپونشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادېږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېریږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاريتم ډولونه:

معمولي لوګاريتم هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، معمولي لوګاريتم يا اعشاري (Brigys) لوګاريتم بلل کېږي چې د $\log$ په سمبول سره ښودل کېږي.

طبيعي لوګاريتم هغه لوګاريتم چې قاعده يې e وي، د طبيعي لوګاريتم په نامه يادېږي، چې طبيعي لوګاريتم د $\ln$ په سمبول ښودل کېږي يعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستيک او مانتيس

کرکټرستيک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسي چې $1 \le S < 10$ او n يو تام عدد دی n د مشخصې يا کرکټرستيک په نامه يادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتيس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتيس په نامه يادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتيس يو مثبت عدد د صفر او يوه ترمنځ دی.

انتي لوګاريتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاريتم انتي لوګاريتم دی يعنې $y = anti \log x$

خطي انټرپوليشن: که يو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، پدې صورت کې دا طريقه د خطي انټرپوليشن په نامه يادېږي.

اکسپونشيل او لوګاريتمي معادلې

- **اکسپونشيل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپونشيل معادلی په نامه يادېږي، د مجهول د پيدا کولو لپاره د طاقت له قوانينو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاريتمي معادلې** هغه لوګاريتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاريتمي معادلو په نامه يادېږي.



د څېړکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړئ. تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 8$ $d)\ 9$

4. د x قیمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x = -3$ $b)\ x = 9$ $c)\ x = -9$ $d)\ x = 3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه یاکرکټرستیک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10. د یوه عدد دلوګاریتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $d)$ هیڅ یو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^{x}=3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x}=9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2)=2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1}=64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1}=7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1}=1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3)=2-\log 20$ $h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2)=\log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4}=?$ $b)\log_3\frac{1}{243}=?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100}=?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}})=?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1}=?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4}=?$ $b)\quad \log_3\frac{1}{243}=?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100}=?$ $d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1}=?$ $e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}}=?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b)0.8954$ $c)4.5682$ $d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $b)\ 91$ $c)3065.3$ $d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $b)(-84.7)^2$ $c)\sqrt{418}$ $d)\sqrt{0.21}$

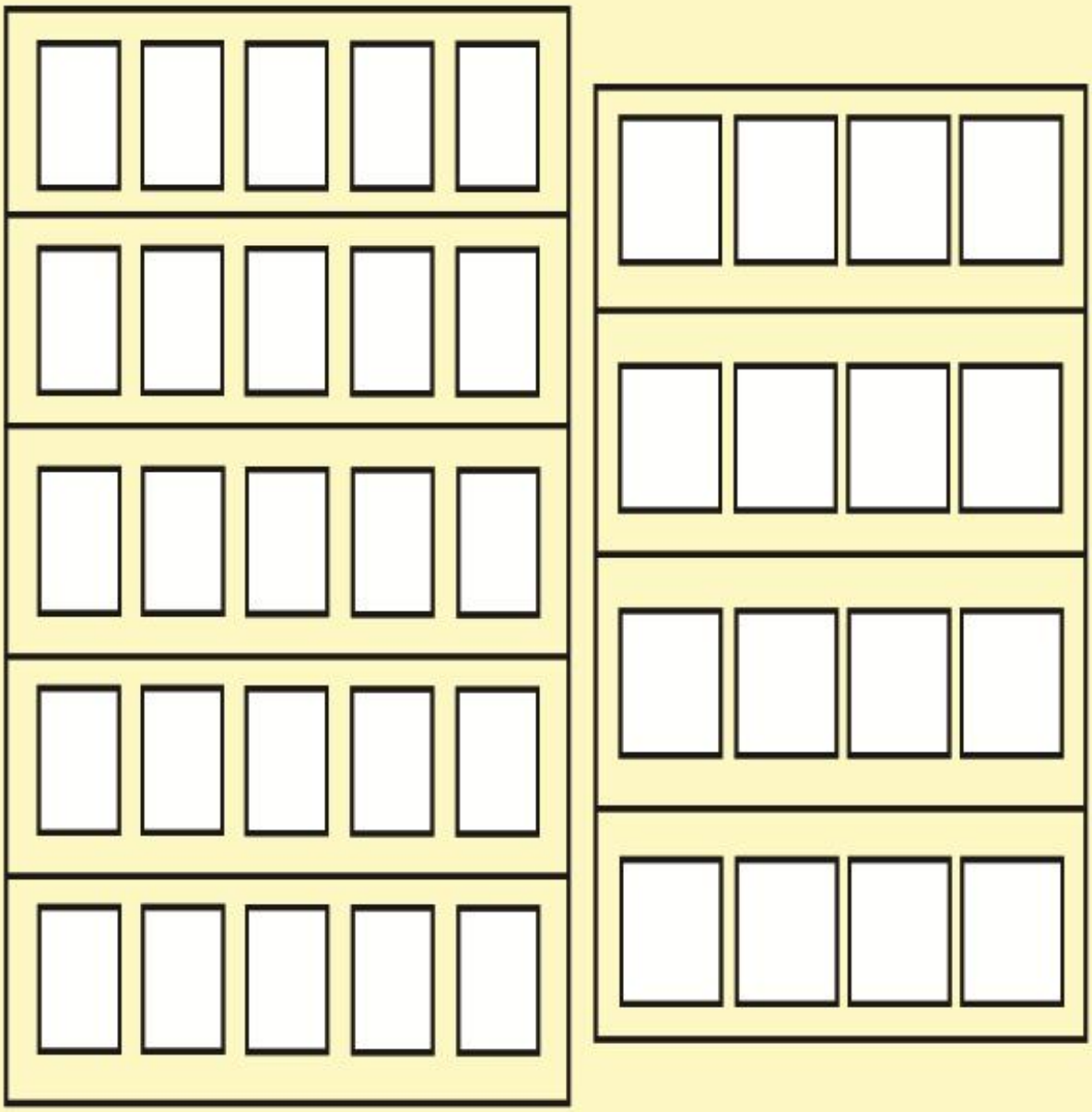
د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

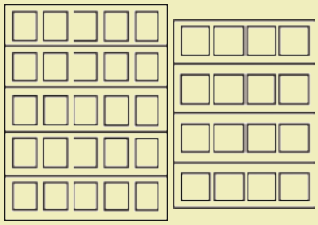
شپږم څپرکی

متریکسونه



متریکسونه

Matrixes



د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لوبې ودانۍ د کړکیو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتنۍ فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p' ، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتنۍ فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېرئ چې هر یود $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر یو د p', p او s', s دټکوبدل شوې وسیله ده.

لاندې هرې ښې وسیلې ته (چې دټکود بدلولو د بدلیدو دنده په غاړه لري) مټریکس وایي.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعریف:د شیانو، عددونو یا تورو ګډډۍ چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مټریکس د عنصر په نامه یادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C...$ مټریکس ښیي او واړه حروفونه $a, b, c...$ د مټریکس عناصر دي.

د عددونو هر یولاندی جدول یو مټریکس په ګوته کوي.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

لومړی سطر — دویم سطر — دریم سطر

لومړی ستون — دویم ستون — دریم ستون

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

لومړی سطر — دویم سطر — دریم سطر

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}$$

کرښه

که چېرې a د یوه مټریکس په $i-$ ام کرښه او $j-$ ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښودل کېږي چې i او j طبیعي عددونه دي، په ترتیب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندویي کوي.

$$i=1,2,3... \ , \ j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}...a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

د مټريکس مرتبه: که د A د مټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي m په n کې مټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times1}$ ، نو د A مټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې مټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$$a)\quad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2} \qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مټريکس دی.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$$a_{ij}=i+j$$

$$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$$

په پايله کې غوښتل شوی مټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$$

$$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot1=3$$

$$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot2=6$$

په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

دوهمه مرتبه مټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً:

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(2 \quad 1)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟



پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو مرتبې وليکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل وليکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3}=(2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad b)\ (a_{ij})_{2\times3}=(\frac{i}{j})_{2\times3}$

د مټريکسونو ډولونه

د مټريکســـونومخامخ شـــکلونه څـــو ســـطرونه اوخوستونونه لري؟

آياصفرونه دمټريکس عناصر کيداى شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$$

$$(4 \quad 5 \quad 6)$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

1. **سـطري مټـريکس**(Row Matrix):هغـه مټريکس چـې يـوازې او يـوازې يـو سـطر ولـري، سـطري مټريکس يې بولي، مثلاً: $A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times 4}$

2. **ستوني مټريکس** (Column Matrix): هغه مټريکس دى چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مټريکس په نامه يادېږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. **صفري مټريکس**(Null matrix): هغه مټريکس چې ټول عناصريې صفرونه وي، له صفري مټريکس څخه عبارت دى او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

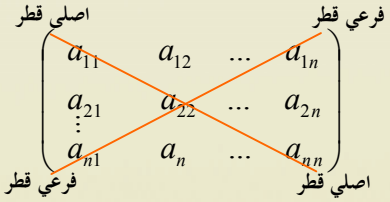
$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مټريکس**(Square Matrix): که چېرې په يوه مټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\5 & 7 & 9\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad m=n \Rightarrow 3=3$$

هر مربعي مټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې a_{11} , a_{22} , ... , a_{nn} وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې a_{n1} , ... , a_{1n} وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.



فعاليت

- داسې مټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 4×1 وي، دا څه ډول مټريکسونه دي؟

5. **قطري مټريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه مټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مټريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}_{2\times2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}_{3\times3}$$

6. **سکالر مټريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري مټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix}K & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & K & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & K & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K\end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مټريکس** (Unite Matrix)**:** که چېرې په يو سکالر يا قطري مټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مټريکس ته واحد مټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\dots0\\ 0 & 1 & 0\dots0\\ 0 & 0 & 1\dots0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0\dots1\end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي مټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې مټریکس د مثلثي مټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مټریکس او B ښکتنی مثلثي مټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مټریکس:

که چېرې د A متقابل مټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مټریکس دی چې هر عنصرد A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مټریکس وي، نومتقابل مټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $b)\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $c)\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$d)\ D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $e)\ E=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7 & 8\end{pmatrix}$ $f)\ F=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

$g)\ G=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ $h)\ H=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

د مټريکسونو جمع او تفريق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مټريکسونو کې د هغوی د جمعې او تفريق په اړه د امکان په صورت کې څه ويلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ \hline A+B= \\ A-B= \\ \hline B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} \; ?$$

1) **د مټريکسونو جمع** :

که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مټريکسونه وي ،نو $A+B=C$ عبارت له هغه مټريکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، يعنې د دوو مټريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مټريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مټريکسونو تفريق**:

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو مټريکسونو تفاضل يا د تفريق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفريق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د مټريکسونو د جمعې او تفريق خاصيتونه:

1. د مټريکسونو جمع کول دبدلون خاصيت لري، خو د مټريکسونو تفريق د بدلون خاصيت نه لري، يعنې:

$$A+B=B+A$$

$$A-B\neq B-A$$

2. د مټريکسونو جمع او تفريق اتحادي خاصيت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عينيت عنصر (Identity Element) د مټريکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مټريکسونو په تفريق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مټريکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفريق حاصل يې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-11&2-1&3-5\\2-0&5-3&4-0\\6-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعاليت

- د يوه مثال په واسطه وښاياست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: ليدل کېږي چې د A او B مټريکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله يې جمع او تفريق امکان نه لري، ځکه د A د مټريکس مرتبه 3×2 او د B مټريکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مټريکسونه د امکان تر بريده جمع او تفريق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په مټریکس کې د سکالر ضرب

مور د مټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله کـه

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **مټریکس** او K یـو سـکالر وي،

د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **مټریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **مټریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څویې د ضرب حاصل یو واحد مټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **مټریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو KA د C له **مټریکس څخه** عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:
$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې A او B دواړه د یو شان مرتبې مټریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویـــم مثـــال: کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکـړل شـوي وي، وښایاسـت چې

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot3 & 2\cdot6\\ 2(-3) & 2\cdot9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot6 & 3\cdot12\\ 3(-6) & 3\cdot18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot3 & 6\cdot6\\ 6(-3) & 6\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot3 & 3\cdot6\\ 3(-3) & 3\cdot9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$



پوښتنې

1. کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکـړل شـوي وي. پـه مټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

د دوو مټریکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

ایاد دوو مټریکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تاسو د دوو مټریکسونو د جمعې لپاره پیدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مټریکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعریف

دوه مټریکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونیسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مټریکسونه یو په بل کې ضرب شي، نو باید د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مټریکسونو د ضرب حاصل بیا هم یو مټریکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر یې د لومړي مټریکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر یې د دویم مټریکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

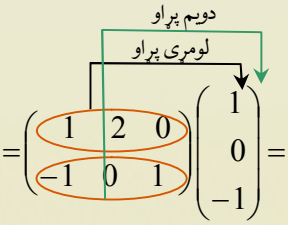
د دوو مټریکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مټریکس لومړی سطر د دویم مټریکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې یې لیکو، په دویمه مرحله کې بیا هم د لومړي مټریکس دویم سطر د دویم مټریکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دویمه سطر کې یې لیکو، دغې عملیې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مټریکس په دویم مټریکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مټریکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښیو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:



$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\-1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخېستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\\(-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\(-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\-2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\-2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&2&0\\6&1&7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\6&1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب حاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & (-3)(-1)+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مټریکسونوپه ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

دویم خاصیت: د مټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې A,B او C د $m\times n$ مرتبې مټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې مټریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$

د یوه مټریکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی مټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي؟

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چېرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي مټریکس سره مساوي دی، نوی مټریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چېرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ټرانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ټرانسپوز مټریکس په A^T سمبول کېږي. د ټرانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ټرانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مټریکس ته متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=A \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$

د متناظر مټریکس پېژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

د ټرانسپوز مټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز مټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ټرانسپوز مټریکسونو سره مساوی دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

پوښتنې

1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

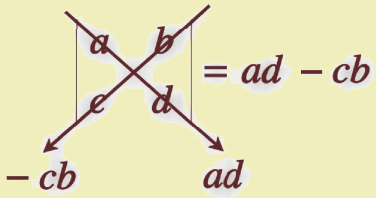
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیټرمېنانت

Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي مټریکس داسې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چېرې د A مټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټریکس له دیټرمېنانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټریکس دیټرمېنانت په $|A|$ ، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کېږي.

په همدې ډول که چېرې د $n\times n$ مرتبې یو مټریکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند دیټرمېنانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي مټریکس په پام کې نیسو او د تعریف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

د 2×2 مرتبې مټریکسونو د دیټرمېنانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمېنانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمېنانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمېنانت محاسبه کړئ.

د 3×3 مټریکسونو د دیټرمینانټ محاسبه: د $A_{3\times 3}$ مټریکس، دیټرمینانټ په پام کې نیسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times 3}$ دیټرمینانټ د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

لومړی پراو: اول ستون او دریم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې دیټرمینانټ محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دویم پراو: دویم ستون او دریم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې دیټرمینانټ محاسبه او د دویم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د دیټرمینانټ د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دریم پراو: دریم ستون او دریم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې دیټرمینانټ محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})a_{33}$$

څلورم پراو: د 1، 2 او 3 ټول پراوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A دیټرمینانټ مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: د لاندې دیټرمینانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

I) $\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$

II) $\begin{vmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$

III) $\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعالیت

- د $A=\begin{vmatrix}a & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ له دیټرمینانت څخه د a قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: **د ساروس په طریقه د دیټرمینانت محاسبه:** په دغه طریقه کې د دیټرمینانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټریکس دیټرمینانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیټرمېنانت لاندینۍ برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کرنه سرته رسوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

فرعي قطر — فرعي قطر — فرعي قطر — اصلي قطر — اصلي قطر — اصلي قطر

دویم مثال: د لاندې دیټرمېنانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \big(3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 5 + (-1)(-4)(-2)\big) - \big((-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 0(-2) + 2(-4)\cdot 6\big)$$

$$= (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیټرمېنانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیټرمېنانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیټرمېنانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $b)\ \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $c)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $d)\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2. د لاندې دیټرمېنانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

د دیټرمینانټ خاصیتونه

که چیرې په یوه دیټرمینانټ کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د دیټرمینانټ په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعالیت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ دیټرمینانټونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ دیټرمینانټ په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ ، وروسته یې $|A^T|$ دیټرمینانټ محاسبه کړئ او وښایاست چې $|A|=|A^T|$.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چېرې $A_{n\times n}$ یو مټریکس وي، د $|A|$ دیټرمینانټ لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ مټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A دیټرمینانټ مساوي له صفر سره دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چېرې د $A_{n\times n}$ مټریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند دیټرمینانټ یې مساوي له صفر سره دی.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ مټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A مټریکس دیټرمینانټ او A^T مټریکس دیټرمینانټ یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول دیټرمینانټ ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړتیا هم لري، لکه:

که چېرې په یوه دیټرمېنانټ کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمېنانټ اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}$ دیټرمېنانټ لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیټرمېنانټونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمېنانټ کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیټرمېنانټ کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمېنانټ ګډ عامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمېنانټ ګډ فکټور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمېنانټ ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\ 8 & 2 & 21\\ 20 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمېنانټ په لومړي ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمېنانټ ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\ 8 & 2 & 21\\ 20 & 1 & 25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4 & 3 & 22\\ 2 & 2 & 21\\ 5 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دیټرمېنانټ دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمېنانټونو قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix}$ $b)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ $c)\ \begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

د 2×2 مرتبه يې مټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

په همدې ډول د ځينو مربعي مټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مټريکس په پام کې ونيسئ او ديټرمېنانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مټريکس د A له مټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مټريکس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مټريکس د A د مټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په يـاد ولـرئ: د A مربعي مټريکس ته منفرد مټريکس(Singular Matrix) ويـل کېږي، کـله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مټريکس ته غير منفرد مټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مټريکس د معکوس مټريکس لرونکی دی چې:

1. مټريکس مربعي وي.
2. ديټرمېنانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي مټريکس(Ad joint of matrix) :د 2×2 مرتبې الحاقي مټريکس د پيدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځايونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره ليکو، هغه نوی مټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت يو مټريکس معکوس مټريکس لري چې ديټرمېنانټ يې د صفر خلاف وي، يعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مټريکس يې پيدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

ليدل کېږي چې د A مټريکس ديټرمېنانټ د صفر خلاف دی، نو د A مټريکس معکوس مټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & \frac{-2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموينه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ويلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټريکس چې ديټرمېنانټ يې د صفر خلاف يعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



پوښتنې

1. د لاندې مټريکسونو څخه کوم يو مټريکس معکوس لري.

$a)\ A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $b)\ B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مټريکسونو معکوس مټريکس په لاس راوړئ او وازمويئ.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس متریکس څخه په کاراخیستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مـو لـه معکـوس متـریکس څخـه پـه گټه اخیستني د خطي معادلو د سیستم د حل پـه اړه فکـر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضریبونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنگه چې A د سیستم د چپ لوري د ضریبونو متریکس، B د بښي لوري د ثابتو عددونو ستوني متریکس او X د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلیږي:

$$AX = B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د خطي دوه مجهوله $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\quad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمینانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$

د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آيا کولای شو، د ضريبونو د متريکس د ديټرمينانت او لـه مجهولينـو يعنـي د x,y,z سـره د متنـاظرو متريکسونو د ديټرمينانت په واسطه د خطي معادلو د سيستم حل پيدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سيستم په پام کې نيسو او د ضريبونو متريکس يې په A سره ښيو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د x,y او z قيمتونه له لاندې اړيکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A|\neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنيو اړيکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتيب سره د x,y او z اړوند متناظرو متريکسونو ديټرمينانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سيستم زيات شوي متريکس ليکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون د x ضریبونو په ځای څلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د څلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مټریکس دیټرمینانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای څلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases}x-3y=3\\2x+y=2\end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq0$$

څرنګه چې $|A|\neq0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\left(\begin{array}{cc:c}1 & -3 & 3\\2 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3\\2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سيستم د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = -9-4+4-12-6-2$$
$$= -21-8=-29\neq 0$$

خرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix} = 12-22+20-(66-8+10)$$
$$=10-68=-58$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{matrix} = -15-8+22-(20+33+4)$$
$$=-23+22-57=-58$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د x, y او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \Rightarrow -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \Rightarrow 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \Rightarrow 11=11$$

فعالیت

دگرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$

د معادلو د سیستم حل د ګوس(*Gouse*) په طریقه

آیا کولای شو له مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

د ګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنۍ عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم د ګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطرد تفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1 - R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{دویم سطر په(-1) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو مټریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې پې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم ګام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې پې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دریم سطر کې پې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پراو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې اېږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$
$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته راغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$
$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$
$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 2 & 7 & 12 & | & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{لومړی پراو}\ -2R_1+R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 2 & 7 & 12 & | & 40 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{دویم پراو}\ -R_1+R_3\to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & 3 & 6 & | & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{دریم پراو}\ R_2+R_3\to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی مټریکس کې د x_1, x_2 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې ($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو مټریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه دگوس په طریقه حل کړئ.

$a)$ $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$

د مټریکس تعریف: یوه ګډډۀ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مټریکس(Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- **سطري مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مټریکس**: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مټریکس**: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مټریکسونه**: دوه مټریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وي.
- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطري مټریکس بلل کېږي.
- **سکالر مټریکس**: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- **واحد مټریکس**: په هر سکالري مټریکس کې چې د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مټریکسونو جمع او تفریق**: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n}\pm B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$
2) $A-B\neq B-A$
3) $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$
4) $A+0=0+A=A$
5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA=K(a_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha\ A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha\ A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\ \beta)A=\beta(\alpha\ A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=(C_{ij})_{m\times p}=C_{m\times p}$$

یعنې د دوو مټریکسونو د ضرب حاصل هغه دریم مټریکس دی چې د سطرونو شمېر یې له لومړي مټریکس سره او د ستونونو شمېر یې له دویم مټریکس سره برابر وي.

د مټریکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مټریکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د یوه مټریکس ترانسپوز مټریکس: که د یوه $A_{m\times n}$ مټریکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مټریکس چې لاسته راځي ،د ټرانسپوز مټریکس په نامه یادېږي. د A ترانسپوز مټریکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مټریکس: که په یوه مټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نومورې مټریکس د مثلثي مټریکس په نامه یادېږي.

متناظر مټریکس: که د A یو مټریکس له خپل ترانسپوز A^T مټریکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مټریکس ته متناظر مټریکس وایي.

دیټرمېنانت: که د A مټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټریکس له دیټرمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ یا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د دیټرمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مټریکس د یوه سطر او یا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو دیټرمېنانت یې صفر دی، یعنې: $\det A = |A| = 0$
2. که د دیټرمېنانت دوه سطرونه او یا دوه ستونونه سره برابر وي، نو دیټرمېنانت یې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مټریکس د یوه سطر یا ستون عناصر د بل سطر یا ستون د عناصرو مضرب وي، نو دیټرمېنانت یې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مټریکس او د A ترانسپوز مټریکس دیټرمېنانتونه سره مساوي وي، یعنې: $|A^T| = |A|$

د مټریکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مټریکس په پام کې نیسو ،که چېرې د B مربعي مټریکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مټریکس د A د مټریکس معکوس دی او د A د مټریکس معکوس مټریکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سیستم حل:

- له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخېستنې د خطي معادلو د سیستم حل.
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه.
- د ګوس په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل.



د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $b)\ 9$ $c)\ \frac{1}{9}$ $d)\ 3$

2. که $A=\begin{pmatrix}2m-3 & -1\\ 1 & m\end{pmatrix}$ معکوس منونکی مټریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1,\frac{1}{2}$ $b)\ m\neq 1$ $c)\ m=0$ $d)\ m\neq 1,\frac{1}{2}$

3. که $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ وي، د x هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix}9 & 5\\ 25 & 14\end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix}9 & -5\\ -25 & 14\end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix}9 & 5\\ -25 & -16\end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix}-9 & 5\\ -25 & -12\end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ مټریکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

$a)$ د y محور $b)$ د x محور $c)\ y+2x=0$ $d)\ y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیټرمینانت $\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x=1,2$ $b)\ x=3,1$ $c)\ x=\frac{1}{2},3$ $d)\ x=3,2$

6. د $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}$ دیټرمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $b)\ 39$ $c)\ 19$ $d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad$ $b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ او وواياست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د مټریکسونو ضرب د درو مټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیټرمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$a)\begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د ګوس په طریقه حل کړئ.

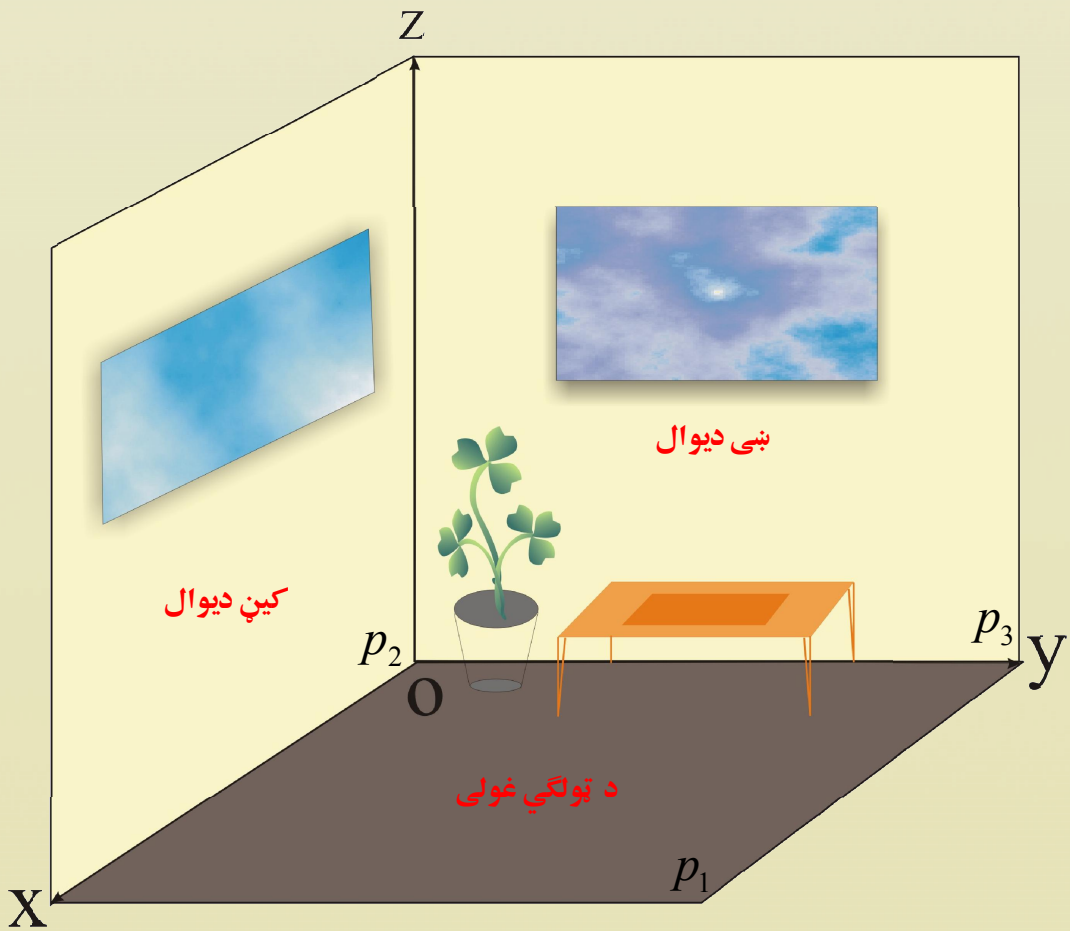
$a)\begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس مټریکس په طریقه حل کړئ.

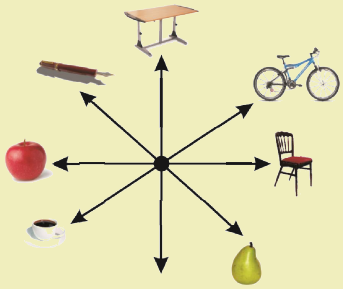
$a)\begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$

اووم څپرکی

وکتورونه


z
x
y
o
p_1
p_2
p_3
کيڼ ديوال
شی ديوال
د ټولګي غولی

د وضعيه کميتونو په قايم سيستم کې وکتورونه



له يوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شيانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.

تعريف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، يا په بل عبارت هغه کميت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجيل او داسې نور. هر غشی د يو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء يې د وضعيه کميتونو د قايم سيستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه يادېږي.

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په قايم سيستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی يې د B (5,5) مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قايمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه يې سره توپير ولري.
- يو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ترلاسه کېږي.

پايله: په يوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی يې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د يو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې يو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

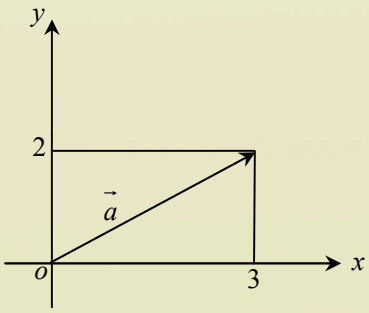
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

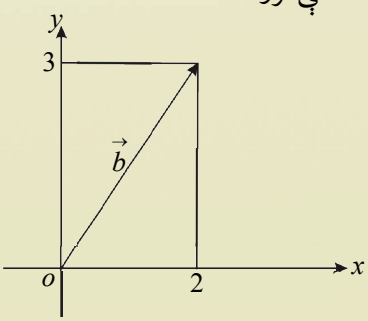
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:



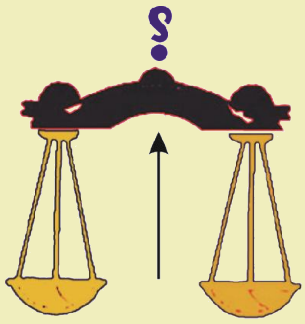


یـــادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
   a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
   b. دوارې وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
   c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

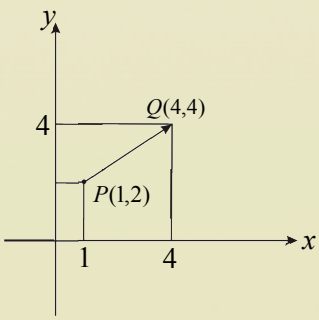


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې ترل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

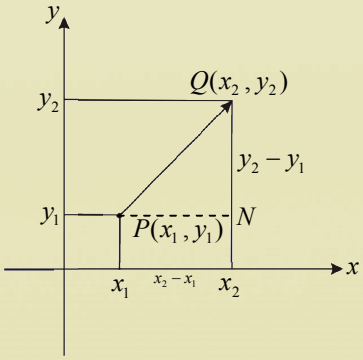
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $\overset{\Delta}{PQN}$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^2}$

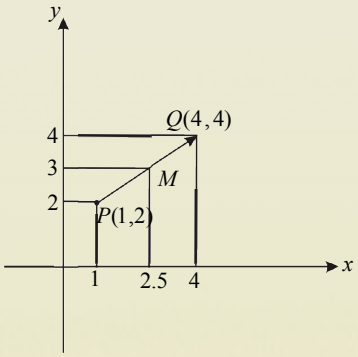


- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:



$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{a_x{}^2+a_x{}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

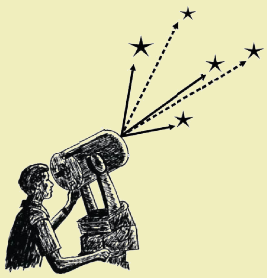
د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

i) $B(2,7)$, $A(3,4)$

ii) $N(5,1)$, $M(1,5)$

iii) $Q(8,8)$, $P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضا کې ځانګړې وکتورونه ښیي.

د یوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره یوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ ست په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

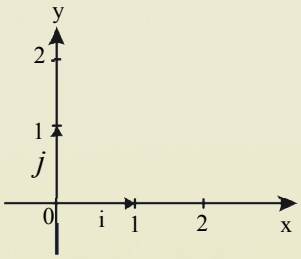
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو ست چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

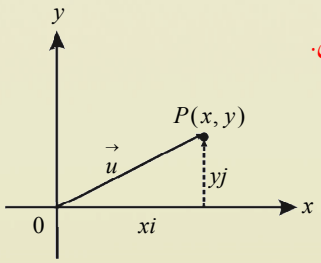
پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نېولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دی چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.



واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزایند لپاره تر یې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$ ، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات



که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور دیوال ته وټاکو؟

تعریف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x,y,z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفېږي:

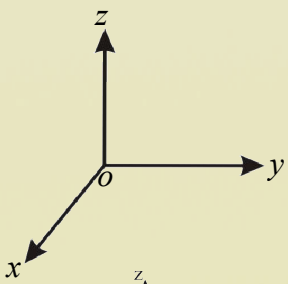
$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x,y,z) / x,y,z \in IR\}$$

هغه درې مستویګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستویګانې بلل کېږي.

د دغو مستویګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قایمې زاویې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قایم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودرېږي، هغه محور چې د لیدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د لیدونکی د لید په لور دی د y محور او هغه محور چې د لیدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی . چې د قایمو مختصاتو مبداء ښیي.

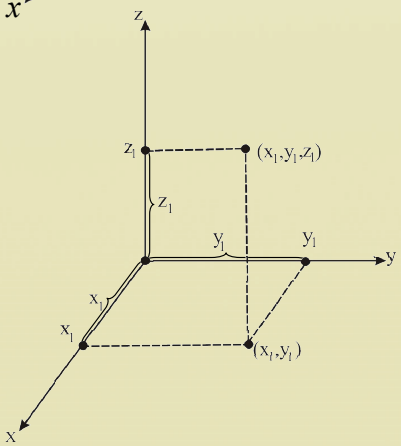
په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دي چې له درې واړو مستویګانو څخه یې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو څخه په $|x|$ ، $|y|$ او $|z|$ سره ښیي.



په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د $A(x_1,y_1,z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نیولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسمو، د تقاطع ټکی یې چې (x,y) دی، پیدا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د z له محور سره رسمو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړېږي.



یادونه: په درې بعدي فضا کې د x, y او z مختصو منفي جهتونه د نومورو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضا کې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\overrightarrow{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$، $\vec{v}-\vec{w}$، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

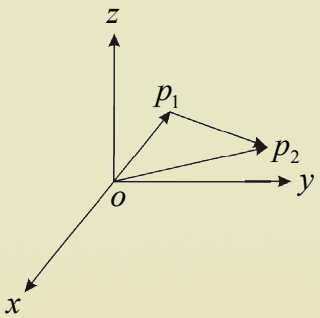
یادونه:

A- کښـدای شـي سـطحي تـه ورتـه درې واحـد وکتورونـه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چـې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوي، د x,y,z محورونو په امتداد د واحد وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هـر اختیـاري وکتـور د واحـد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښـودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **پـــه فضـــا کـــې د دوو ټکـــو تـــرمنځ واټـــن**: کـه چېـرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\vec{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخـه مطلـوب وي یعنـي $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2,y_2,z_2)=(x,y,z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لانـدې فورمـول پـه واسـطه پیـدا کـولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دویم مثال: که $\vec{a} = (-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 16 + 25} = \sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $i)\ \vec{u} + 2\vec{v} = ?$ $ii)\ \left|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}\right| = ?$

حل: لرو چې:

$$i)\ \vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 2(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})$$
$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k} = 10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$ii)\ \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} - 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k} = -8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\left|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}\right| = \left|-8i - 12j + 2k\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 144 + 4} = \sqrt{212}$$

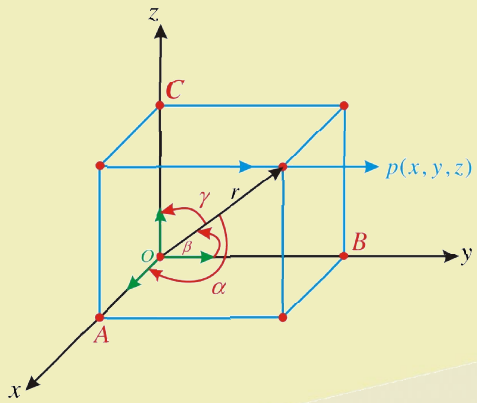
پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$ $b)\ \left|\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}\right| = ?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v}, \vec{v}$ او $\vec{w}, \vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.
4. د هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u}, \vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \vec{xi} + \vec{yj} + \vec{zk}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاویې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آیا ویلای شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چېرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاویو د کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: که په فضا کې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

د پورتنۍ پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ مسیر عبارت دی، له:

$$\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\begin{pmatrix} \frac{\vec{v}_x}{\left|\vec{v}\right|} \\ \frac{\vec{v}_y}{\left|\vec{v}\right|} \\ \frac{\vec{v}_z}{\left|\vec{v}\right|} \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\quad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\quad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\vec{i}+(\alpha+1)\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کاربړي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\le\theta\le\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

(i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

(ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

(iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

(iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه وکتورونو $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

$(i)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

$(ii)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصيت يا ځانګړتيا).

$(iii)\quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$ (په جمع د ضرب توزيعي خاصيت).

$(iv)\quad (c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ د ضرب توزيعي خاصيت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د تعريف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

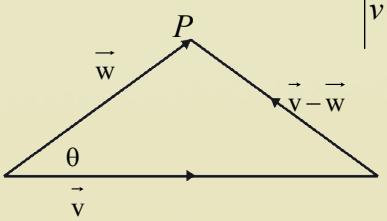
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دويم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د يو مستوي دوه وکتورونه وي، وښياست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعريف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پايله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړيکې څخه لرو:

$$\left|x_1-x_2\right|^2+\left|y_1-y_2\right|^2=\left|x_1^2+y_1^2\right\|x_2^2+y_2^2\left|-2\right|\vec{v}\left|\cdot\right|\vec{w}\left|\cos\theta\right.$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta\,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دریم مثال: که چېرې د $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښایاست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

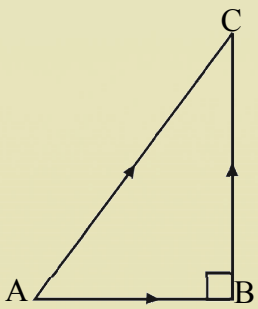
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\ (3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad \Rightarrow \quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښایاست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع تاکې عبارت دی له:

$$\vec{AB}+\vec{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$ وي.



$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\ (\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{BC}$$

پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له a,b او c سره مساوي دي.

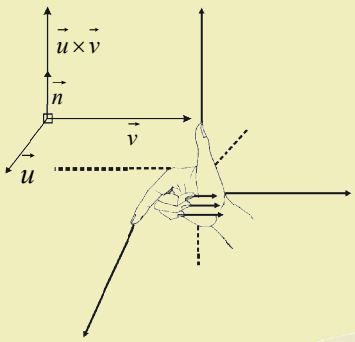
2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\qquad$ $ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{u}\cdot\vec{v}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونـه داسې وښـیو چې $\vec{u}$ د ورغـوي پـه جهت، $\vec{v}$ د خنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونـو د وکتـوري ضـرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنـو تـر منـځ زاویـه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونـو پـه واسـطه جـوړه شـوې مسـتوي لـه عمـود واحـد وکتـور څخـه عبـارت دی، د ښـې لاس قاعـدې پـه واسـطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمـه ده چـې د وکتورونـو خطـي ترکیـب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه ستې د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغـه سـټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه ستې وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتـور پـه داسـې حـال کـې چـې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتـور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوی وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a_1} + 2\vec{a_2} = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویـــم مثـــال: کـــه $\vec{a_1} = (2,3)$ او $\vec{a_2} = (5,1)$ وکتورونـــه راکـــړل شـــوي وي، وښایاســـت چـــې د $\vec{a} = (6, -5)$ وکتور د $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: څرنګه چې $\alpha_1 , \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1)$$
$$= (6, -5) = (2\alpha_1, 3\alpha_1) + (5\alpha_2, \alpha_2)$$
$$= (6, -5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{l} 3\{2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 2\{3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{array}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1)$$
$$\vec{a} = (6, -5) = -\frac{31}{13}(2, 3) + \frac{28}{13}(5, 1)$$

یعني که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور په لاس راځي، نو وموليدل چې $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

نو: $= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

که $e_2 = (0,1)$ او $e_1 = (1, 0)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

خرنګه چې $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)$$
$$= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \ldots, e_n$ طبیعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

غیرې خپلواک خطي وکتورونـه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونـه خطاً مربـوط خطـي غیـر خپلـواک یـا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو لـه ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو ستې په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پراوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو،په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شـي نو وایو چې نومورې وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثـــــــال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونـــــه پـــــه لانـــــدې ډول راکـــــړل شـــــوې دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاسـت چـې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونـه خطـي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$\alpha_2 = -\alpha_3$

$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 \;,\; \alpha_1 = 0$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$

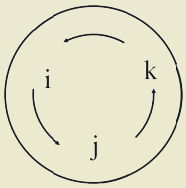
$0 + 2\alpha_3 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_3 = 0$

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$

$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \;\Rightarrow\; 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$

څرنګه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت



د تعریف لـه مخې د ښـي لاس د قاعـدې پـه واسـطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښیي.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{i},\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونـو د ضـرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوې دایرې په څېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونـه چې صـفر نـه وي. د وکتـوري ضـرب لـه حاصـل څخـه او د ښـي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u}\times\vec{u}=0$

ii) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

iii) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

iv) $\vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})$, $k\in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: کـه چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونـه صـفر نـه وي، نو وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویـم مثـال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهیږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنيو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، يو سکالر دی. وروسته نومورې سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پايلې يې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

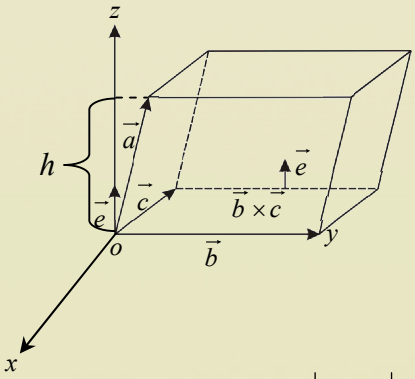
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\neq(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$

iii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iv) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})=0$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړيکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم}=v=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e})=\vec{b}\,|\,\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$$

$$v=\vec{b}(\vec{a}\times\vec{c})=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|h$$

تطبيقاتي مسئلې:

1- که چېرې $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کېږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آيا دغه وکتور يوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دليل مو څه دی؟

حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهېږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

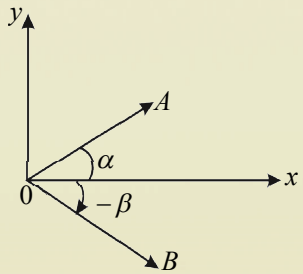
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$$

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازینی عمود وکتورونـه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتـور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&2\\4&3&1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبـــوت کـــړئ چـــې د α او β د هـــرې اختیـــاري زاویـــې لپـــاره

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: کـه $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونـه د x,y پـه مسـتوي کـې داسې راکړل شـوي دي چې د x لـه محـور سـره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو: $A\hat{O}B=\alpha+\beta$

له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

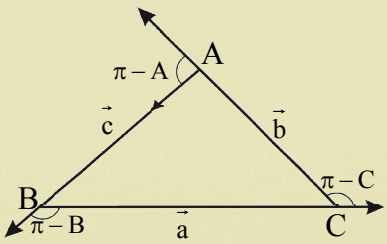
$$\vec{OA}\times\vec{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\cos\alpha&\sin\alpha&0\\\cos\beta&-\sin\beta&0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\quad\left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$



$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\quad\ldots\ldots\ldots(i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتينو مساواتو د تعريف له مخې داسې ليکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin(\pi-A)=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\ |\vec{c}|\ \sin A=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ /\div ab$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a} \quad \text{.....} \quad (ii) \qquad \text{يا} \qquad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \quad \text{.....} \quad (ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \ \Rightarrow (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

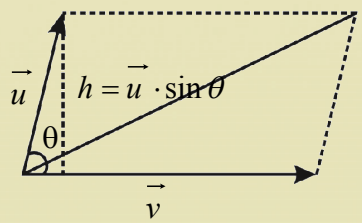
$$\left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right|\sin A=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\sin C$$

$$c\sin A=a\sin C\ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \ \text{..... } iii \qquad \text{يا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساين قضيه لاسته راځي: $\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}$

4- **د يوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاويه θ د لاندې شکل په څېر په پام کې نيسو. گورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پيدا کولو لپاره کولای شو، وليکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

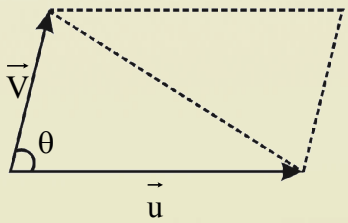
څرنگه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

يعني د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پايله: خرنګه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

د مثلث مساحت $=\frac{1}{2}$ (د متوازي الاضلاع مساحت) $=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1=t^2+t+2$، $\vec{a}_2=2t^2+t$ او $\vec{a}_3=3t^2+2t+2$ وي وښایاست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
2. وښایاست چې $\vec{a}=2i+3j+4k$ او $\vec{b}=4i+6j+8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟
3. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1,-1,1)$، د $B(2,1,-1)$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.
4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$، $Q(-1,2,4)$، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.
5. که $\vec{u}=2i-j+k$، $\vec{v}=4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادېږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څېر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $P\hat{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ د $\overrightarrow{PQ}$ د منځنې ټکې کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږدوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادېږي.

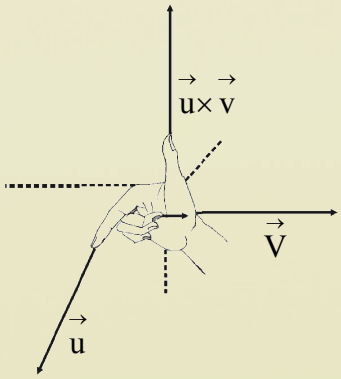
مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه تړاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قایم ډول کړه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه ګوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښیي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

که $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$

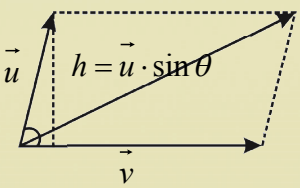
ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.

د متوازي الاضلاع مساحت $=|\vec{u}\times\vec{v}|$



د څپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چېرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

i) $\vec{AB}=?$ *ii)* $2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ *iii)* $2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

i) $\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ *ii)* $\vec{v}-3\vec{w}$ *iii)* $\left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

iv): د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چېرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

i) $\begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}$

ii) $\begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$

iii) $\begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}$

iv) $\begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i)$: $P(0,0,0)$, $Q(2,3,2)$, $R(-1,1,4)$

$ii)$: $P(1,-1,-1)$, $Q(2,0,-1)$, $R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

$i)$: $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(2,-1,1)$, $D(3,1,4)$

$ii)$: $A(1,2,-1)$, $B(4,2,-3)$, $C(6,-5,2)$, $D(-3.5,-4)$

$iii)$: $A(1,-1,1)$, $B(-1,2,2)$, $C(-3,4,-5)$, $D(-3,5,-4)$

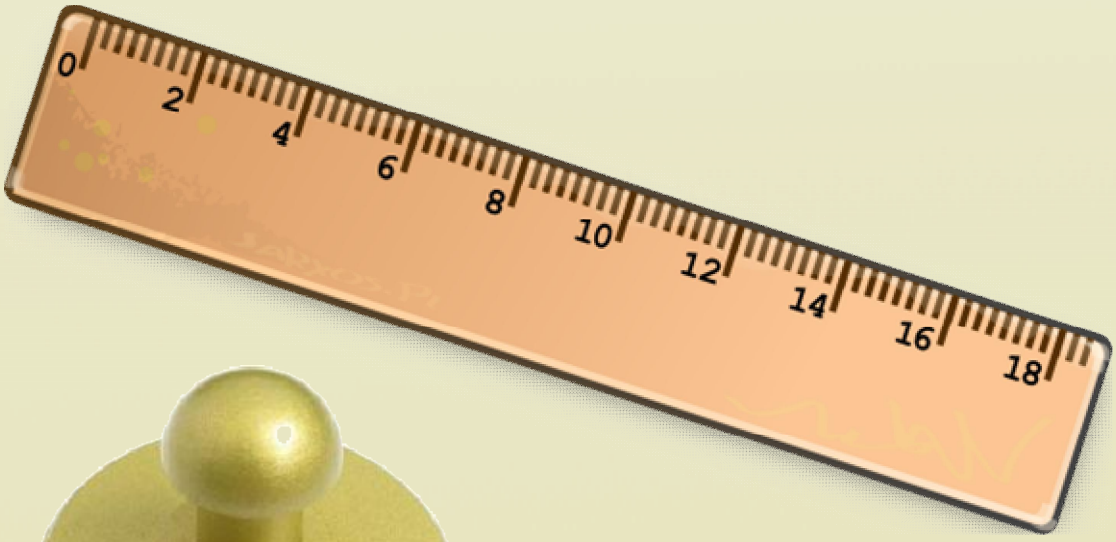
9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i)$: $\vec{u} = 5i - j + k$, $\vec{v} = j - 5k$, $\vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii)$: $\vec{u} = i + 2j - k$, $\vec{v} = i + j + k$, $\vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څېرکی

احصائیه

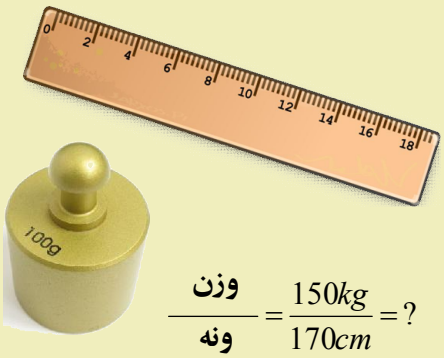




$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضريب

Coefficient Variations



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

که چېرې د يوې ټولنې تيتوالی په متر او د بلې ټولنې په کيلوګرام ښودل شوی وي. آيا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تيتوالی په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

فعاليت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کوونکو ونه او وزن تشخيص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واريانس او معياري انحراف محاسبه کړئ.
- آيا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولينو د تيتوالي د ميزان پرتله د واريانس او معياري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معياري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو په لاس راغلی مقدار يا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو يا تغييراتو ضريب يا نسبي تيتوالی داسې کارول کېږي، چې واريانس او معياري انحراف هغه نه لري. يو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د يادولو وړ ده.

دبدلونونو يا تغييراتو ضريب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معياري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي اويو مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي يعنې:

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{يا} \quad \text{دبدلونونو يا تغييراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضريب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضريب يوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعريف شوي وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضريب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په يو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضريب تغير نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري ټلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا دبدلون ضریب قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A > C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټینګښت یې کم دی.

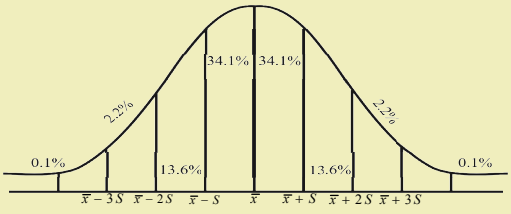
پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

   1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغییراتو ضریب څو دي؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

په نورمال منحني کې تيتوالی

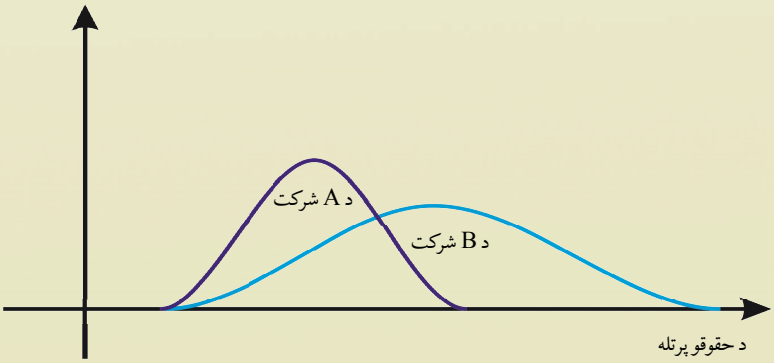


اوريدلي به مو وي چې وايي: يو شه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد په $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96%د پلټنې موارد په $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په يوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غير عادي او له $3S$ څخه زيات انحراف زيات غير عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله يا واټن ولري، د تيتوالي يا تيټې ډېټا په نامه يادېږي.

مثال: که د يوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معياري انحراف يې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزيع څخه د فيصدي په ګټه اخېستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزيع تشريح کړئ؟

ب: آيا ويلاي شئ چې د 1400 افغانيو معادل معاش يو غير عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x} \pm S$ ، $\bar{x} \pm 2S$ ، $\bar{x} \pm 3S$ قيمتونه په لاس راوړو.

فيصدي	فاصله د افغانيو له مخې	فاصله د S له مخې
68%	11800 – 13200	$\bar{x} \pm S$
96%	11100 – 13900	$\bar{x} \pm 2S$
99.6 %	10400 – 14600	$\bar{x} \pm 3S$

د ب حل: لومړی $\bar{x} - 1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ يعنې 1400 افغانيو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

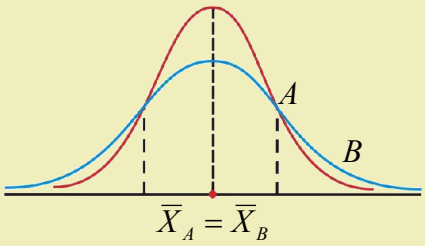
$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانيو معاش غير عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زيات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چېرې 62.28% فيصده مشاهدات د $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ په فاصله کې پراته وي، آيا ويلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحني سره وښايئ؟

دنورمالي توزيع دډول معيارونه



د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يـوې احصـايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپـاره چـې د يـوې احصـايوي مجمـوعې اطلاعـات، تناظر او د مثبت او منفـي اشـارو لرونکـي وي؛ نـو لـه کـوم ډول منحني څخه بايد ګټه واخلو.

فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د مودې معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او مودې د کميتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چېرې يوه توزيع متناظره وي؛ نو د اوسط او وسـط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او تيټوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو معيار** skewness: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول

تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښي لوري ته خمېدګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کين لورې ته خمېدګي لري.

که چېرې د کثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ فورمـول پـه واسـطه پيدا کېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$S k_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسـون د خمېـدلو د لـو ضـريب مثبـت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

2- **د پرسوب** kurtosis **معيار**: د پرسوب معيار ددې ښودونکی دی چې د توزيع يوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټيټوالي لري.

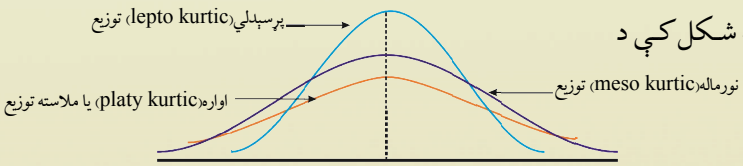
د پرسوب شاخص هغه معمولي معيار دی چې د يوې منحني د پرسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پرسوب معيار فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فريکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معياري انحراف دی.

د پرسوب معيار د توزيع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معيار د پرتله کيدو لپاره په کار لوړېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د α_4 ضريب د دريو ډوله خمېدلو او پرسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوي توزيع ښودل شوې ده ښيي.



حل: د نورمالي توزيع د پرسوب د درجې او ميزان د پرتله کيدو لپاره لکه: يو ستندرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزيع لپاره د α_4 قيمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زياته وي نظر نورمال منحني ته د منحني پرسوب زيات دی.

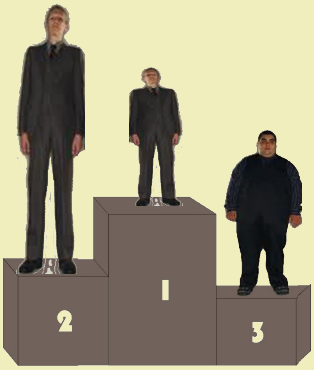
يا په بل عبارت يوه پرسيدلی توزيع چې څوکه لري او که چېرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالي منحني ته يې پرسوب کم دی چې د ملاستې يا اوارې توزيع په نامه يادېږي.

پوښتنې

د يوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصايې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پيرسون د پرسوب ضريب حساب کړئ.

د زده‌کوونکو شمېر	نمرې
4	40-50
6	50-60
10	60-70
4	70-80
4	80-90
2	90-100

څو متحوله ټولنې



کـه چېـرې د خپـل يـوه ټولګيـوال د ونـې پـه انـدازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه تـه پـه پـام د هغـه د وزن پـه اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې یې کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ دریاضیکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړېږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلی دي: $(2,4),(3,5),(1,7),(2,3),(1,8)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دویمه مختصه د موږک وزن دغذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- معلومات په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د موږکانو شمیر	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	د موږکانو لومړنی وزن	د موږکانو شمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

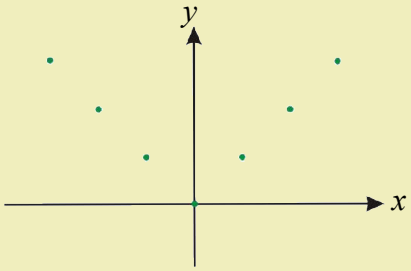
پورتنۍ ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لرئ؟

د تیتوالي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یي ولیکئ:

فعالیت

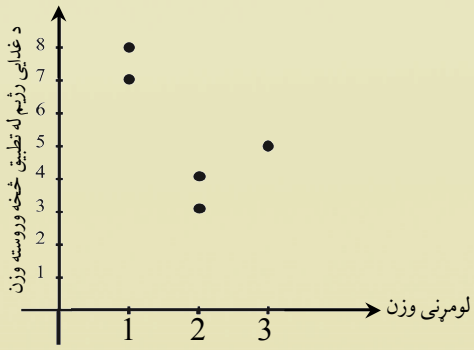
لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه یو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې ترلې قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

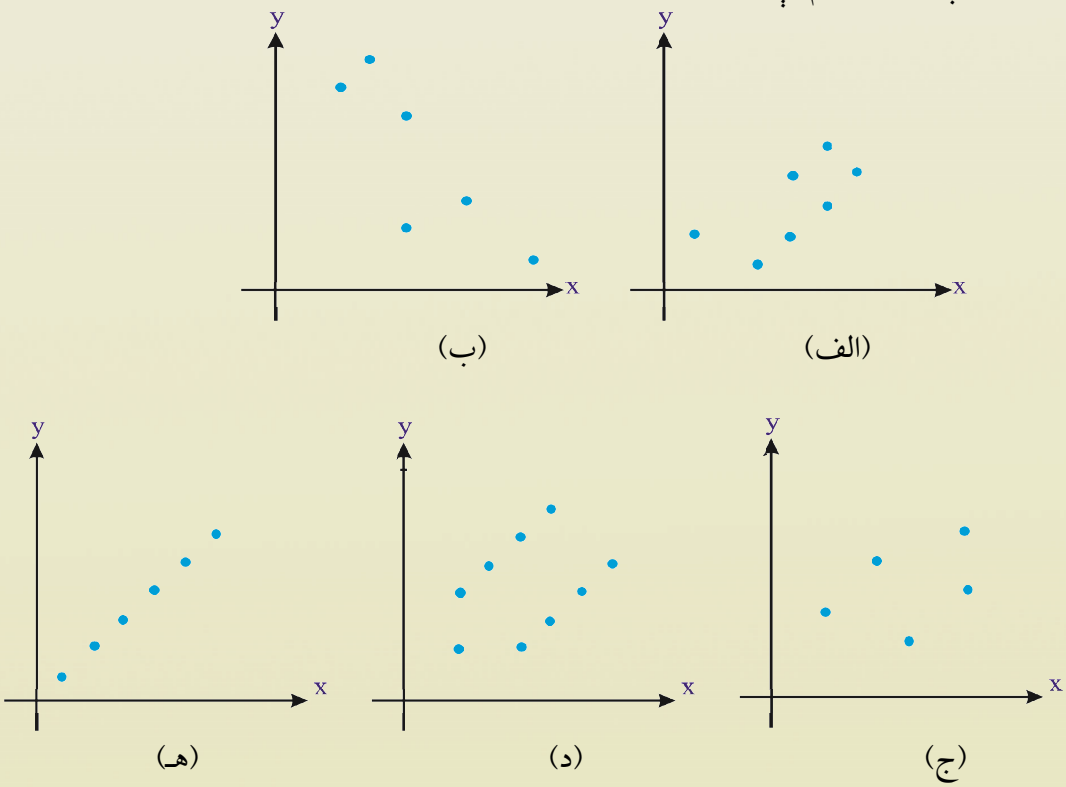
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.



پورتنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:

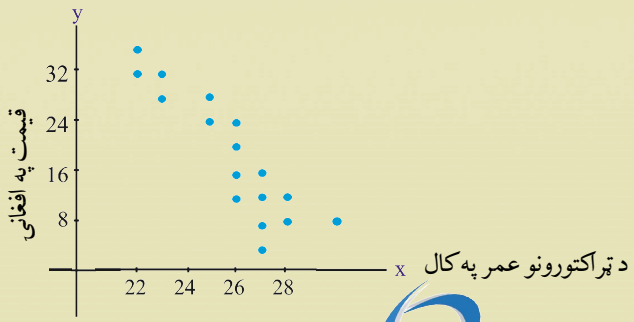


د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونوپه اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو په پرتله زیاته ده، د (هـ)په ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

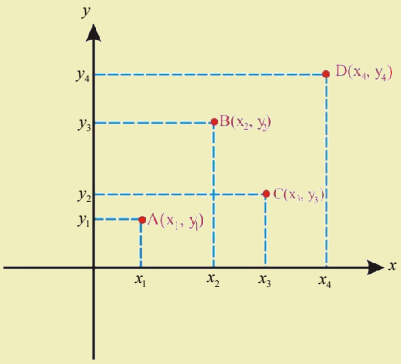
پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمېر ټراکټورنو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینی؟ توضیح یې کړئ.



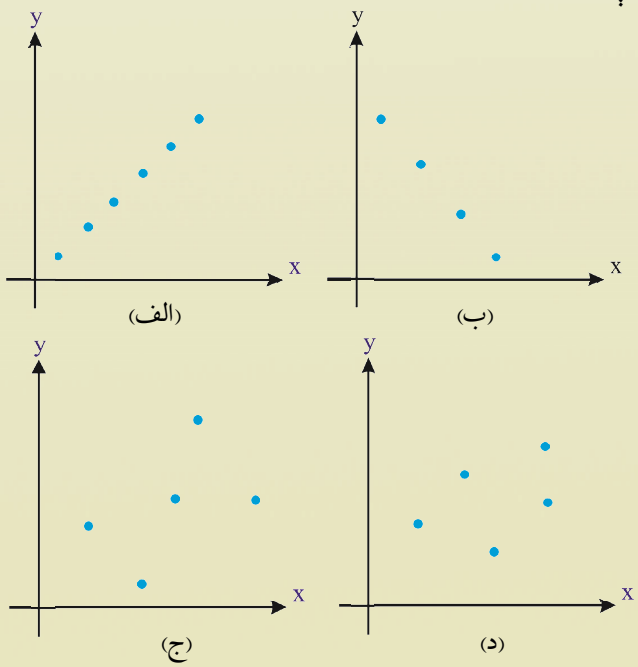
پیوستون او دپیوستون ضریب

د A, B, C او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟



فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېریږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پورتني فعاليت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې يوې مستقيمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معيار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پيوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پيوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پيوستون د ضريب په نامه ياد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-\frac{(\text{د } y \text{ ګڼو اوسط})(\text{د } x \text{ ونو اوسط})}{(\text{د } y \text{ ګڼو معياري انحراف})(\text{د } x \text{ ونو معياري انحراف})}=\frac{\sum xy}{n}-\frac{\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذايي رژيم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونيسئ.

د موږکانو شمېره	لومړنی وزن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذايي رژيم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

حل: که چېرې x لومړني وزنونه او y د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونيسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دی له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \quad , \quad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واريانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ ګڼو واريانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګڼو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

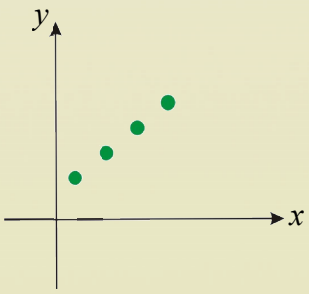
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

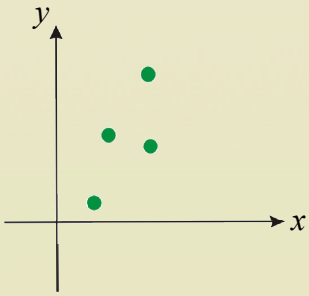
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

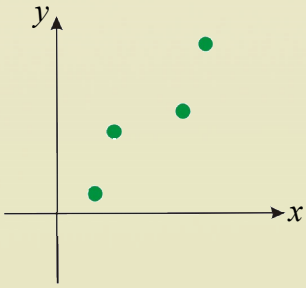
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5



(الف)



(ب)



(ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$x \text{ د ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$y \text{ گانو واریانس د} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$x \text{ د او } y \text{ گانو دضرب حاصل} = (1\cdot 3)+(2\cdot 5)+(3\cdot 7)+(9\cdot 4) = 70$$

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4} - (2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$$\bar{y} = \frac{24}{4} = 6 \quad , \quad \bar{x} = 2.5$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{16+0+0+16}{4} = 8 \quad ، \quad \text{د } x \text{ ونو واریانس} = 1.25$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه} = 2+12+18+40 = 72$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4} - (2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$, $\bar{x} = 2.5$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = 4.6875 \quad ، \quad \text{د } x \text{ ونو واریانس} = 1.25$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75 - (2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نژدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1 او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

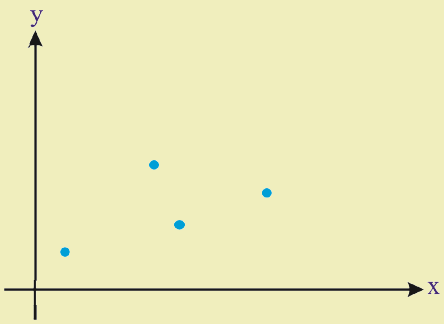
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولګیوالو د وني او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

د خطي ميلان معادله

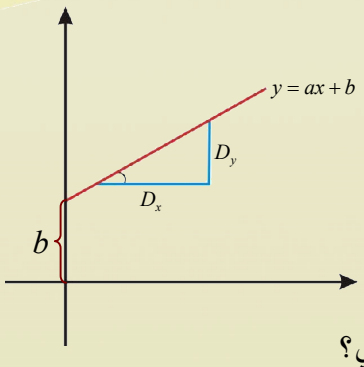
The linear regression equation



فرض کړئ چې يو پاشلی ګراف په لاندې ډول راکړل شـوی وي. يـوه مسـتقيمه کرښـه چـې معادلـه يـې د $y = ax + b$ پـه ډول ورکـړل شـوي وي، پيـدا کـړئ چې ګراف يې ټولو ټکو ته نږدې فاصله يا واټن ولري.

فعاليت

په مخامخ شکل کې يوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف يې مستقيمه کرښه ده، رسم شوې ده.

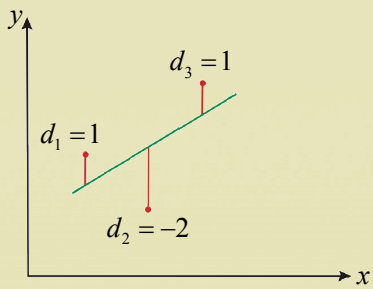


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولين په کوم نوم يادېږي؟
- د $y = ax + b$ مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د يو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چېرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزايد او که متناقص دی؟

همدغه راز که چېرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چېرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:

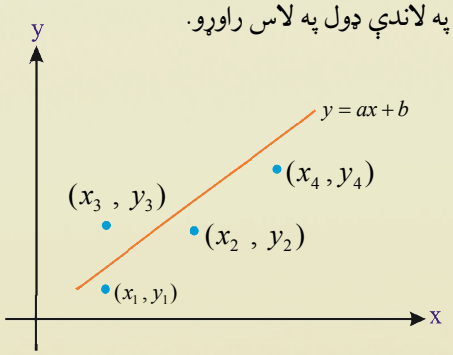


د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړي ټکي د مستقيمې کرښې په ګراف پراته دي.

هر څومره چې د پاشلي ټکی مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او په شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چيرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تګلاره چې د لږکيو يعنې اصغري مېتود جوړونې[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

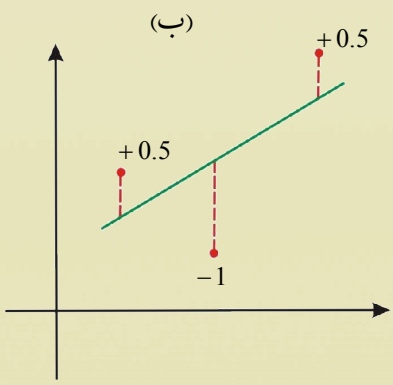


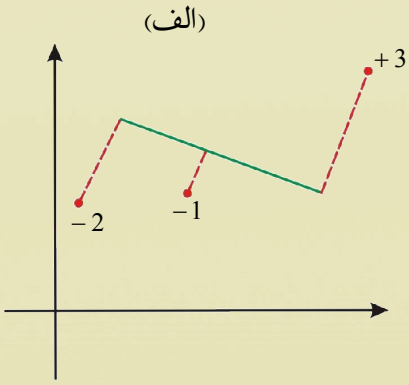
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه ديـاګرام يـا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولـو ټکـو تـه نږدې وي. په دې تګلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمـودي انحرافونـو د دويـم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.





[1] - the method of least square

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته څخه ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2)$ = د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5)$ = د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ویلای چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې یو له بله د منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2$ = د خطاګانو د دویم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2$ = د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چېرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو تویېرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$
$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$a = r\frac{sy}{sx} \quad b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

$$b = \frac{\sum x\,y - n\,\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x\,y}{\sum x^2} \quad , \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعاتو تګلارې په نامه یادېږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاندوینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال: لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریګریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow S_x=\sqrt{2}$$

$$S_y^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5} \Rightarrow S_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

له دې کبله:

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-b\cdot 3$$

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=-1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$$

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-(-1)(3)=2+3=5$$

په دې ډول د ریګریشن معادله عبارت ده له: $y=ax+b=-x+5$



پوښتنه

که چېرې $y=2x+3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C\cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب } C\cdot V = 100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د تیتوالي ټول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې تیتوالی: نورماله منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کیدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالي توزیع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید څرنګوالی د کږېدواو پرسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پرسېدو(جګېدلو) معیار د پرسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زمونږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د تیتوالي ګراف: د تیتوالي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په یوه مستوي کې د قایمو مختصاتو په سېسټم کې ښودل کېږي. کیدای شي د ټکو او تیتوالي ګراف په مرسته دري ډوله اطلاعات زمونږ په اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښیي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحولین په یوه لوري بدلون کوي یعنې x او y دواړه په یوه کرښه لوی او یاهم کوچنی شي، چې پیوستون یې مستقیمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چېرې x لوی شي y کوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوستون ډول، جهت او میزان د پیوستون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې $\sum xy$ د x ونو او y ګانو د ضرب د حاصل مجموع، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y ګانو اوسط دی، همداراز S_x د x ونو معیاري انحراف او S_y د y ګانو معیاري انحراف دی.

د ریګریشن کرښه: ریګریشن(تخميني) د تابع د یوه متحول له قیمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریګرېشن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طریقه حساب او همدارنګه د a او b ضریبونه د دغې طریقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad , \qquad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

چې S_y د y معیاري انحراف او S_x د x معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پیوستون ضریب، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y ګانو اوسط دی.

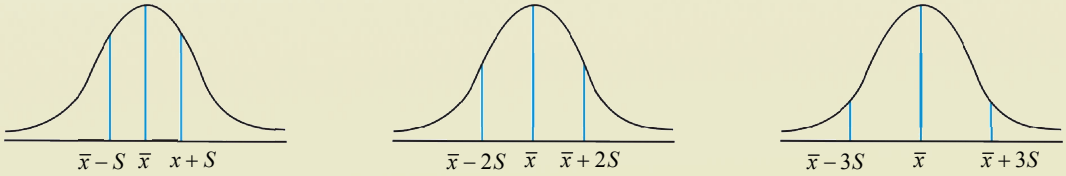


د څپرکي پوښتنې

1-که چېرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x}=50$ او واریانس یې $S^2=64$ وي، د بدلون ضریب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چېرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره ووایاست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زده کوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخېستل شوی دی، د مرتبود جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)

(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)

(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

که چېرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پورتنيو اعدادو په پام کې نيولو سره:

الف: د معلومات د تيتوالي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقيمه کرښه نظر د ريګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې x او y سره بشپړ پيوستون او معکوس ولري، يعنې $S_x = S_y$ ، نو د y نسبت x ته د ريګرېشن خط کوم دی؟

1) $y = -\frac{1}{2}x + b$ 2) $y = \frac{1}{2}x + b$ 3) $y = x + b$ 4) $y = -x + b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د رياضي او فزيک د مضمون 20% د آزموينې پايلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د رياضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزيک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د رياضي نمبرې	12	10	16	18	16	12	6	14	12
د فزيک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ريګريشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آيا د دوو آزموينو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او يو فيصده محلول اغيزې د يون پلازما پر ميزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د يون پلازما ميزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنۍ جدول کې متحولين وڅېړئ؟

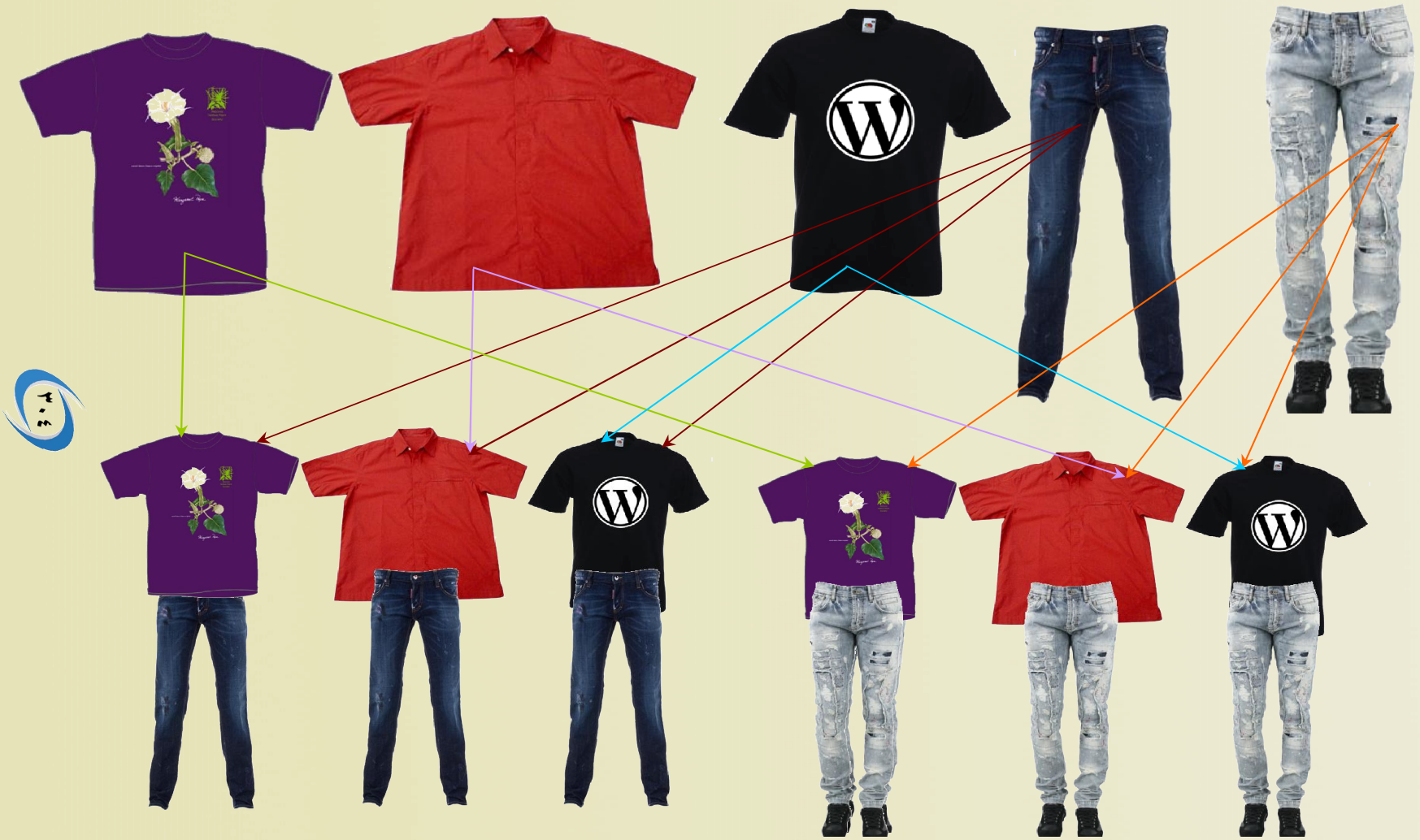
ـ په پورتنيو متحولينو کې کوم يو خپلواک او کوم يو ناخپلواک متحول دی؟

ـ يو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولينو ترمنځ اړيکه وښيي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښاياست؟

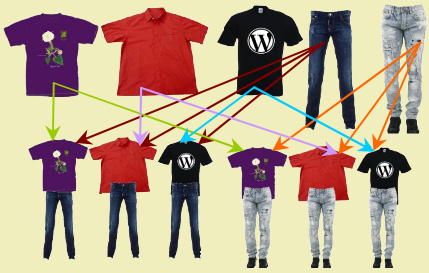
نهم څپرکی

احتمالات



پرموټېشن يا ترتيب

Permutation



که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډولـه کـولای شـو هغـه سـره جـوړه جـوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمویئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څـو درې رقمـي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکي رقم تکرار نه وي.
- د پورتني فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایي چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \dots\ 2\cdot1$ سره دي.
- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \dots\ \cdot n}_{n\text{ځلې }n}=n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عـدد لپـاره د $(1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot n)$ حاصـل ضـرب په لنـډ ډول په $n!$ (n – فکتوریـل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامه هـم یـادېږي په P_n سره ښودل کېږي.که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نېولو سره $P_n=n!$ سره کېږي.

که چېرې په ترتیب کې تکرار شونی او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یـا پرموټېشـنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $(k\le n)$, $P_n^{(k)}=\frac{n!}{k!}$ او دارنګه معنا ورکـوي چې یـو عنصـر پـه n ترتیب کې k ځلی تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر یوه طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i):د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوبې آزموینې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 میزونو تر شا په لیکه کښېنې چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب 16! دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکارېږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \ \ldots \ , k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \ldots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سباکاروان ټرانسپورټي شرکت دکابل جلال‌آباد په لین کې پنځه لوی سروېسونه او د جلال‌آباد- کونړ په لاره درې مینې بسونه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او مینې بسونو کې له کابله- کونړ ته سفر وکړو؟

حل: پوهېږو له کابله تر جلال‌آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مینې بس د انتخاب چانس له جلال‌آباد څخه تر کونړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times 3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

4	3	2
دامکاناتو ډولونه	د دویم رقم ځای	د دریم رقم ځای

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot 3\cdot 2=24$ او د فورمول له مخې لروچې:

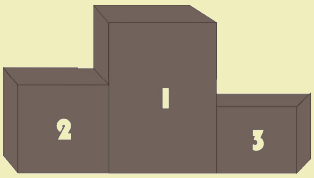
$$P_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1!}{1!}=24$$

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروسته رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردي میز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښېني.
3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زېړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

مخکې له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بېنوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بېنوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \quad , \quad k,n\in IN$$

فعالیت

- د پورتني تعریف په پام کې نیولو سره، د بېنوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بېنوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$, $k=0,1,2$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square\, a^2+\square\, ab+\square\, b^2$$

- د بېنوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$, $k=0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟

- څرنګه چې $\binom{2}{2}=\binom{2}{0}=1$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟

- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بېنوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.

- د $\binom{4}{k}$, $k=0,1,2,3,4$ قیمتونه د بېنوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکي؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

(i) $\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1$

(ii) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت دي له n عنصره ستِ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r لـه n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت يې عبارت دی له:

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې لـه 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې:

$$C_4^7=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټیشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې:

$$P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو څخه لکه: A,B,C,D,E,F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس تـه راوړي؟

3- له 4 نارینه‌وو او 6 میرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینـه پـه کـې یـو رئیس او دویـم یـې مـالي مسؤول وي.

ترکیب
Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په خو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو ستړ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوي ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره ستړ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!\cdot 4!} = 27405$$

دویم مثال: له $A = \{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي ستونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$$



پوښتنې

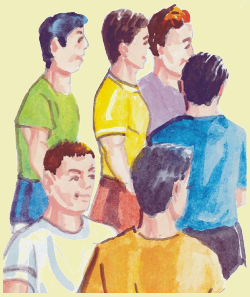
1- که چېرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښولولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چېرې $P(n,2) - C_2^n = 36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبـديـل

Variation



په يوه المپياکې له 10 ورزشـي ټيمونـو څخـه پـه څـو ډولونو د سرو زرو، سپينو زرو او برونزو مډالونه شـتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شيانو په پام کې نيولو سره د k په شمېر شيان ټاکو،د هغوی مجموعې شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شيانو په ټاکلو کې ترتيب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دويم، دريم او ... شـتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنيو دواړو ډولونو ترمنځ توپير په کومه اندازه ده؟

پايله: د هغو ترکيبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتيب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کـې وي، نو په دې صورت کې يې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکيب د وريشن Variation يا تبديل په نامه ياد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow \quad V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په يوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې يو تن رئيس، يو لومړی مرستيال، يو دويم مرستيال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

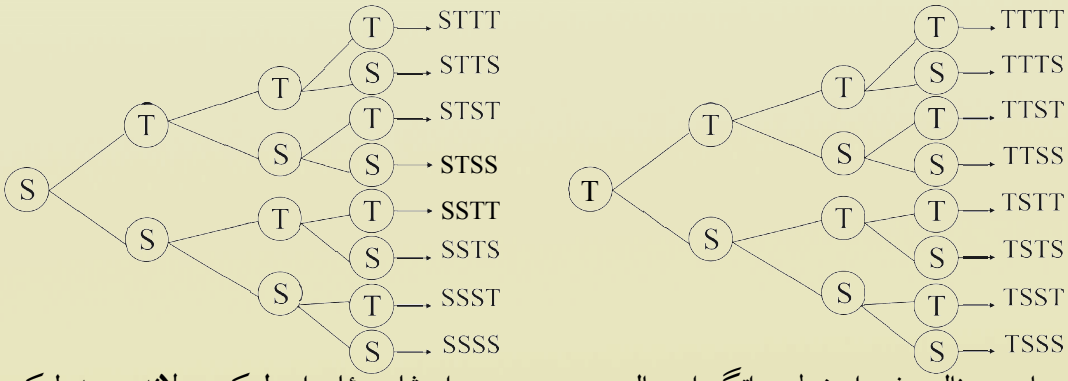
حل:مسـئله په حقيقت کې د 4 تنو تبديل له 30 تنو څخه ده، چې د تعريـف لـه مخـې لـه لانـدې فورمـول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتيبونو، ترکيبونو او تبديلونو لپاره تر بحث لاندې و نيول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

د تاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمېر	
	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k)=n!\quad,\quad n=k$	$P(n,k)=\frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنیشن	$C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n=\binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n=k!\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n=n^k$

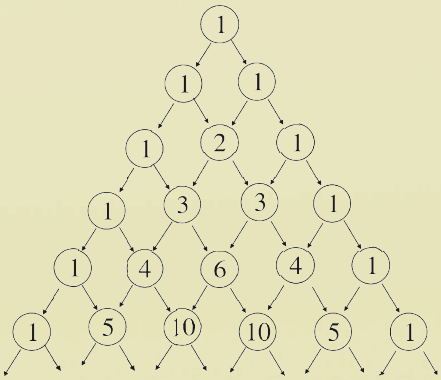
مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې وینسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $S=$ او خط $T=$) دی.



د پاسنۍ مثال د شپر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

خلورځله		دري ځله		دوه ځله		يوځل		هېڅ ځل		د سکې غورځوول
احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	د خط د رانګې شمېر
$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1							
$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{2}{4}$	1					
$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{1}{16}$	4									

که چېرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غږي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.



دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کینې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.

په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بېنهایت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جملهیي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جملهيې په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه تړې تاوشوې ده يو شان ده:

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$
$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$
$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$
$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$
$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^3$$

①
 ① ② ①
 ① ③ ③ ①
 ① ④ ⑥ ④ ①

چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنۍ مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دي له: $P(\text{خط راتګ}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په يوه سيالۍ کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته وټاکو.
2. د يوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستيال په توګه وټاکو.

د بېنوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بېنوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5   10  10  5   1
```

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$

$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$

$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

فعالیت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناڅاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A, \overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A) = P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A}) = ?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ.

د بینوم د ضریبونو ارایه	احتمال	ممکنې پایلې	k
$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$	$(1-p)^2$		0
	$2p(1-p)$	10	1
$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$		11	2
$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = ?$	$(p+(1-p))^2$		

د $B(n,p,k)$ لیکنه د برتولی د مسالی د احتمال په نامه یادېږي.

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: په يوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي يې په مساوي احتمال په تجربه کې بيابيا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د ښېنوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی ښېنوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه يادېږي او ليکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پيدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌يي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌يي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$$|\Omega|=(365)^k$$

د A حادثه

په دې ډول اوس که چېرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نيسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$



پوښتنې

وښيئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (II)$$

دوه جمله يي احتمال



آیا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پایلې په دوه ناڅاپي پیښو چې له یو بل سره هیڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتیب کړو. موضوع د ستې د تیوري له مخې په یوه اختیاري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناڅاپي پیښو ته چې اتحاد یې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې یې تشریح کړي.

فعالیت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه یې پېژنئ یا دونه وکړئ او یوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي یا ناڅاپي پیښو په ارایه چې ټوله نمونه‌يي فضا یې یوازې دوه غړي ولري.
- آیا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې یې له 2 څخه زیات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې یوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څنګه کولای شو چې یوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په یوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د یو غړي د پیښې احتمال p وي، د بلې پیښې د احتمال قیمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې ($0 \le k \le n$) وړل او نور یې بایلل دي و، د k ځلې بریالیتوب (P) په n ځلې تکرار کې پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې یوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

- که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د یو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بایلل دي.
- که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې او د بایللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، یعنې لرو چې:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

د n ځلې تکرار کې k، – ام ځلې وړل په

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناڅاپي پیښو کې پورتنۍ اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنۍ پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې یې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یوه کورنۍ کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلک او نجلۍ زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي. $=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي) $=\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال یې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمال یې p په پام کې ونیسو، نو د خط د نه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{matrix} \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې} \\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \end{matrix} \right\rangle = \binom{4}{3}.\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}.\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}}.\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شیر راتګ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړی چې:

(i): په 4 ځله غورځیدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدو کې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

د څېړکې مهم ټکي

فکټوریل: د هر n طبیعي عدد لپاره د $n\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په n! (n فکټوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n=n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دي په:

$$P_k^n=\frac{n!}{k!}\quad,\quad k\leq n$$

$\binom{n}{k}$ د n د k **له پاسه:** د $\binom{n}{k}$, n د k له پاسه، د بېنوم هغه ضریبونه دي چې k د بېنوم د توان په ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي: $0\leq k\leq n$ ، $n,k\in IN$ ، $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په: $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ، $r \le n$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دي، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^{\,n} = k! \cdot C_k^{\,n} = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^{\,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q = 1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې وړلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې $q = 1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{matrix} \text{د k ځلې وړلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې} \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad ، \quad 0 \le k \le n$$



د څېړکې پوښتنې

1- د لاندې عددونو ستې په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ درېدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودریږي؟

4- په څو ډولونه کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو کې ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟